Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE† TÜBINGEN

R. NEVANLINNA HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. NOVEMBER 1961)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Math. Z.

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

---

77. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Jörgens, K., Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen 295

Schmidt, H., Eine Anwendung der Siegelschen Transzendenzsätze für Bessel-Funktionen 309

Berger, R., und E. Kunz, Über die Struktur der Differentialmoduln von diskreten Bewertungsringen 314

Endler, O., Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen 339

Nastold, H.-J., Zur Cohomologietheorie in der algebraischen Geometrie. I. . . . 359

Jörgens, K.
Math. Zeitschr. 77, 295–308 (1961)

Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Konrad Jörgens

Einleitung

In einer früheren Arbeit [3] wurden nichtlineare Wellengleichungen betrachtet, die als Feldgleichungen einer nichtlinearen klassischen Mesonentheorie in Betracht kommen. Unter diesen wurde eine ausgezeichnete Klasse durch Bedingungen charakterisiert, die für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems *im Großen* notwendig sind. Auf die umgekehrte Frage, ob für die so ausgezeichneten Wellengleichungen und zu beliebigen Anfangswerten stets eine Lösung im Großen existiert, wurde nur eine recht unvollständige Antwort gegeben, wobei die wesentliche Einschränkung die auf den Fall *einer* Raumvariablen war.

Die vorliegende Arbeit enthält einen weiteren Beitrag zu diesem Problem. Es werden die *semilinearen* Wellengleichungen der Form

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in *drei* Raumvariablen betrachtet und es wird gezeigt, daß zu beliebigen Anfangswerten, die den üblichen Differenzierbarkeitsbedingungen genügen, stets eine wohlbestimmte, zweimal stetig differenzierbare Lösung im Großen existiert, falls die Funktion $F(s)$, die durch $F(0)=0$ normiert sei, den Bedingungen $A+F(s)>0$ und

$$|F'(s)| \leqq a[A+F(s)]^{\alpha}$$

mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha<\frac{2}{3}$ genügt. Dies ist im wesentlichen eine *Wachstumsbeschränkung* für $F(s)$, denn es folgt daraus

$$-A<F(s)\leqq\{A^{1-\alpha}+a(1-\alpha)\,s\}^{p}-A$$

mit $p=\dfrac{1}{1-\alpha}<3$. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $F(s)=\mu^2 s+\frac{1}{2}\eta^2 s^2$; die zugehörige Wellengleichung

$$u_{tt}-\Delta u+\mu^2 u+\eta^2|u|^2 u=0$$

ist die Mesonengleichung von Schiff [5].

Es liegt nahe, ausgehend von den gewonnenen Lösungen, durch Grenzübergang *allgemeinere* Lösungen zu konstruieren. Dies ergibt sich ganz von

selbst, wenn man eine Topologie gefunden hat derart, daß die Lösungen im Sinne dieser Topologie stetig von ihren Anfangswerten abhängen. Die verallgemeinerten Lösungen genügen dann auch sog. fortsetzbaren Anfangsbedingungen im Sinne von FRIEDRICHS und LEWY [2]. Es zeigt sich nun, daß man verallgemeinerte Lösungen zu beliebigen Anfangswerten finden kann, die den allgemeinsten in [2] für die lineare Wellengleichung formulierten Bedingungen genügen, d.h. Lösungen, die samt ihren ersten Ableitungen für jedes feste t lokal quadratisch bezüglich der Raumvariablen integrierbar sind. Allerdings muß dazu von der Funktion $F(s)$ zusätzlich $F(s) \geqq 0$ und $|F''(s)| \leqq b$ mit einer geeigneten Konstanten b verlangt werden. Auch diese Bedingungen sind für die Mesonengleichung von SCHIFF offenbar erfüllt.

Alle Beweise stützen sich auf den Energiesatz, der aus der Wellengleichung folgt; die verschiedenen Bedingungen für $F(s)$ hängen eng mit dieser Methode zusammen, und es wird keinerlei Aussage darüber gewonnen, ob sie *notwendig* sind. Für den Fall *einer* Raumvariablen wurden in [3], § 5 analoge Existenzsätze bewiesen, wobei $F(s)$ keinerlei Wachstumsbeschränkungen unterworfen wurde. Für mehr als drei Raumvariable versagt die Methode der vorliegenden Arbeit.

§ 1. Das Anfangswertproblem im Kleinen

Es sei $F(s)$ reellwertig und $F(s) \in C^3[0, \infty)$[1]; außerdem sei F durch die Vorschrift $F(0) = 0$ normiert, was für die Differentialgleichung ohne Bedeutung ist. Gesucht ist eine komplexwertige Lösung $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$ der Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

für $t > 0$, welche für $t = 0$ den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

genügt, wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ gegebene komplexwertige Funktionen sind.

Zur Orientierung wird das entsprechende Problem für die lineare Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ betrachtet. Darüber ist unter anderem folgendes bekannt[2]:

(1) Ist $\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$, so gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung, nämlich

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\, M\{\varphi | x; t\}\right] + t\, M\{\psi | x; t\},$$

worin

$$M\{f | x; t\} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + t\xi)\, d\xi$$

das sphärische Mittel von f, genommen über die Oberfläche der Kugel $K_t(x)$ vom Radius t mit Mittelpunkt x, bezeichnet. Aus der Lösungsformel sieht

[1] Das heißt dreimal stetig differenzierbar im Intervall $0 \leqq s < \infty$.

[2] Vgl. z.B. [1], Kap. VI, § 5.

man, daß die Werte der Lösung in dem Bereich

$$B(K_\varrho(x_0)) = \{x, t | t \geqq 0,\ |x - x_0| + t < \varrho\}$$

nur von den Werten von φ und ψ in $K_\varrho(x_0)$ abhängen; man nennt B daher den Bestimmtheitsbereich zum Gebiet $K_\varrho(x_0)$. Ist $G \subset R^3$ eine beliebige offene Menge, so ist der Bestimmtheitsbereich $B(G)$ die Vereinigung aller $B(K)$ mit $K \subset G$.

(2) Sei $f(x, t) \in C^2$; dann ist

$$w(x,t) = v(x,t) + \int_0^t (t-\tau)\, M\{f | x, \tau; t-\tau\}\, d\tau$$

die einzige zweimal stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $w_{tt} - \Delta w = f(x, t)$ mit den vorgeschriebenen Anfangswerten. Darin bedeutet

$$M\{f | x, \tau; \varrho\} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + \varrho\,\xi, \tau)\, d\xi .$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß das Anfangswertproblem für die nichtlineare Wellengleichung der Integralgleichung

$$u(x,t) = v(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u | x, \tau; t-\tau\}\, d\tau$$

äquivalent ist in dem Sinne, daß jede zweimal stetig differenzierbare Lösung des einen Problems auch Lösung des anderen Problems ist. Gibt es zu beliebigen Anfangswerten $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$ genau eine Lösung $u \in C^2$, so hängen die Werte von u in jedem $B(K)$ nur von den Werten von φ und ψ in K ab, da dies für die Lösung der Integralgleichung richtig ist. Die Bestimmtheitsbereiche $B(G)$ der linearen Wellengleichung sind also zugleich auch Bestimmtheitsbereiche der nichtlinearen Wellengleichung. Nun wird aber, wie einfache Beispiele zeigen, die Lösung des nichtlinearen Problems im allgemeinen nicht in ganz $B(G)$, sondern nur in einer gewissen Nachbarschaft der Anfangsmannigfaltigkeit, d.h. für hinreichend kleine t existieren. Die Frage nach solchen Lösungen wird das Anfangswertproblem *im Kleinen* genannt; im vorliegenden Fall wird sie durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz 1. *Es sei G ein Gebiet des R^3 und es seien Anfangswerte $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$ mit*

$$|\varphi| \leqq c, \quad |\operatorname{grad} \varphi| \leqq c, \quad |\psi| \leqq c \quad \text{für} \quad x \in G$$

gegeben. Dann gibt es eine nur von c und von $F(s)$ abhängige Zahl $T > 0$ derart, daß das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in dem Teilbereich $t \leqq T$ von $B(G)$ genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt.

BEWEIS. Man erhält die gesuchte Lösung durch Anwendung des Iterationsverfahrens auf die äquivalente Integralgleichung, d.h. man setzt $u^{(1)}(x,t) = v(x,t)$ und

$$u^{(n+1)}(x,t) = v(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u^{(n)}|^2)\, u^{(n)} \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Offenbar ist $u^{(n)}(x,t) \in C^2(B(G))$. Als Vorbereitung des Konvergenzbeweises hat man dann zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $u^{(n)}(x,t)$ nachzuweisen. Es gilt

$$v(x,t) = M\{\varphi \,|\, x;\, t\} + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} (\xi,\, \operatorname{grad} \varphi(x + t\xi))\, d\xi + t\, M\{\psi \,|\, x;\, t\}$$

und folglich $|v(x,t)| \leqq (1+2t)c$. Sei nun

$$c_1 = \max_{0 \leqq s \leqq 4c^2} |F'(s)|$$

und

$$T = \min\{\tfrac{1}{4},\, (2c_1)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Dann gilt $|u^{(n)}(x,t)| \leqq 2c$ für $t \leqq T$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dies ist nämlich richtig für $n = 1$; gilt es für n, so folgt aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} |u^{(n+1)}(x,t)| &\leqq |v(x,t)| + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u^{(n)}|^2)\, u^{(n)}| \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau \\ &\leqq (1+2t)\, c + t^2 c\, c_1 \leqq 2c. \end{aligned}$$

Es bleibt nun die Konvergenz der Folge $u^{(n)}(x,t)$ sowie der Folgen der ersten und zweiten Ableitungen für $t \leqq T$ und die Einzigkeit der Lösung der Integralgleichung zu beweisen. Dieser Teil des Beweises ist zwar mühsam, aber vollkommen selbstverständlich und kann daher übergangen werden.

§ 2. Das Anfangswertproblem im Großen

Es soll nun gezeigt werden, daß die in § 1 konstruierte Lösung des Anfangswertproblems sogar *im Großen*, d.h. im ganzen Bestimmtheitsbereich $B(G)$ existiert, falls über die Funktion $F(s)$ weitere Annahmen gemacht werden. Ist G insbesondere der ganze Raum R^3, so ergibt sich die Existenz einer wohlbestimmten Lösung im ganzen Halbraum $t > 0$.

SATZ 2. *Für die Funktion $F(s) \in C^3[0, \infty)$ mit $F(0) = 0$ gelte*

$$A + F(s) > 0 \quad \textit{und} \quad |F'(s)| \leqq a[A + F(s)]^{\alpha}$$

für $0 \leqq s < \infty$ mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha < \frac{2}{3}$. Für jedes Gebiet $G \subset R^3$ und zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$ gibt es dann genau eine Lösung $u(x,t) \in C^2(B(G))$ des Anfangswertproblems für die Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0.$$

Für den Beweis wird ein Hilfssatz benötigt, der aus dem *Energiesatz* folgt; als solchen bezeichnet man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}=2\operatorname{Re}\operatorname{div}(\bar{u}_t\operatorname{grad} u),$$

die für jede Lösung der Differentialgleichung gilt. Hierin bezeichnet Re den Realteil, grad und div bedeuten die Operationen „Gradient" und „Divergenz" bezüglich der Raumvariablen. Ist $K=K_\tau(x_0)$ eine Kugel in R^3 und $u(x,t)\in C^2(\overline{B(K)})$, so erhält man aus dem Energiesatz durch Integration über $B(K)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_M\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\}\,dS$$
$$=\int_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Darin bedeutet M den Kegelmantel $|x-x_0|+t=\tau$, $0\leqq t\leqq\tau$, der zusammen mit K den Rand von $B(K)$ bildet. Die äußere Normale auf M hat die t-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die x_i-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}n_i$, $i=1,2,3$ mit $\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$. Das Oberflächenelement auf M ist mit dS bezeichnet. Nun ist offenbar

$$|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\geqq 0,$$

folglich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_M F(|u|^2)\,dS\leqq\int_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Dies kann man auch in der Form

$$\int_0^\tau(\tau-t)^2\,M\{F(|u|^2)\mid x_0,t;\tau-t\}\,dt\leqq 4\pi\int_{K_\tau(x_0)}\{|\psi|^2+|\operatorname{grad}\varphi|^2+F(|\varphi|^2)\}\,dx$$

schreiben, wenn φ und ψ die Werte von u und u_t für $t=0$ sind.

Hilfssatz 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 sei $K=K_\varrho(x_0)$ eine Kugel und $u(x,t)\in C^2(B(K))$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$u_{tt}-\Delta u+F'(|u|^2)\,u=0$$

mit Anfangswerten $\varphi(x)\in C^3(\overline{K})$, $\psi(x)\in C^2(\overline{K})$.

Behauptung: Es gibt eine nur von den Anfangswerten (und von der Funktion $F(s)$) abhängige Zahl c derart, daß

$$|u(x,t)|\leqq c,\qquad|\operatorname{grad} u|\leqq c,\qquad|u_t|\leqq c$$

für $(x,t)\in B(K)$ gilt.

Beweis. In $B(K)$ ist $t\leqq\varrho$; folglich gibt es eine nur von den Anfangswerten abhängige Zahl c_2 mit

$$|v(x,t)|\leqq c_2,\qquad|\operatorname{grad} v|\leqq c_2,\qquad|v_t|\leqq c_2$$

in $B(K)$. Aus der Integralgleichung für u folgt damit und nach Voraussetzung über $F(s)$

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\leqq |v(x,t)| + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\, u|\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau \\ &\leqq c_2 + a\int_0^t (t-\tau)\, M\{[A+F(|u|^2)]^\alpha |u|\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau \\ &\leqq c_2 + a\left[\int_0^t (t-\tau)^2 M\{A+F(|u|^2)\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\right]^\alpha \times \\ &\quad \times \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Dabei wurde die Höldersche Ungleichung mit $p=\frac{1}{1-\alpha}<3$, $p'=\frac{1}{\alpha}$ auf das dreifache Integral $\int M\{\ldots\}\,d\tau$ mit dem Integranden

$$(t-\tau)\,[A+F(|u|^2)]^\alpha |u| = (t-\tau)^{\frac{2}{p'}}\,[A+F(|u|^2)]^{\frac{1}{p'}}\,(t-\tau)^{\frac{2-p}{p}}\,|u|$$

angewandt. Nach der oben abgeleiteten Ungleichung gilt für $(x,t)\in B(K)$

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-\tau)^2 M\{F(|u|^2)\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau &\leqq 4\pi \int_{K_t(x)} \{(|\psi|^2+|\operatorname{grad}\varphi|^2+F(|\varphi|^2)\}\,d\xi \\ &\leqq 4\pi \int_{K_\varrho(x_0)} \{|\psi|^2+|\operatorname{grad}\varphi|^2+A+F(|\varphi|^2)\}\,d\xi = c_3,\end{aligned}$$

folglich

$$|u(x,t)| \leqq c_2 + a\left[c_3+\frac{A}{3}t^3\right]^\alpha \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\right]^{1/p}$$

und

$$|u(x,t)|^p \leqq c_4 + c_5 \int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

mit $c_4=2^{p-1}c_2^p$ und $c_5=2^{p-1}a^p\left[c_3+\frac{A}{3}\varrho^3\right]^{\alpha p}$. Setzt man nun

$$f(t)=\max_{x\in K_{\varrho-t}(x_0)} |u(x,t)|^p,$$

so ist $f(t)$ nicht größer als die Lösung $g(t)$ der Integralgleichung

$$g(t)=c_4+c_5\int_0^t (t-\tau)^{2-p}\, g(\tau)\,d\tau.$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation findet man die Lösung

$$g(t)=c_4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2-p)!\,c_5 t^{3-p}]^n}{[(3-p)\,n]!}.$$

Daraus folgt die Existenz einer Schranke c_6 für $|u(x,t)|^2$ in $B(K)$. Setzt man nun

$$c_7=\max_{0\leqq s\leqq c_6}|F'(s)|+2c_6\max_{0\leqq s\leqq c_6}|F''(s)|,$$

so erhält man aus der Integralgleichung für u

$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq |\operatorname{grad} v(x,t)| +$$
$$+\int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\operatorname{grad} u + F''(|u|^2)\, u\, 2\operatorname{Re}(\bar{u}\operatorname{grad} u)|\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$
$$\leqq c_2 + \int_0^t (t-\tau)\, c_7 \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |\operatorname{grad} u(x,\tau)|\,d\tau$$

und hieraus
$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq c_2 \operatorname{Cos} \sqrt{c_7}\, t \leqq c_8$$

für $(x,t)\in B(K)$. Auf dieselbe Weise erhält man eine Schranke für $|u_t(x,t)|$ und damit die gewünschte Konstante c.

Beweis von Satz 2. Es genügt, zu zeigen, daß genau eine Lösung in $B(K)$ existiert, wenn K eine beliebige Kugel mit $\bar{K}\subset G$ ist. Nach Satz 1 gibt es eine Lösung in einem Teilbereich $t\leqq T$ von $B(K)$, dessen Breite T nur von einer gemeinsamen oberen Schranke c der Funktionen $|\varphi|$, $|\operatorname{grad}\varphi|$ und $|\psi|$ in K abhängt. Man wird nun versuchen, zur Fortsetzung der Lösung ein neues Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\varphi_1(x) = u(x,T), \qquad \psi_1(x) = u_t(x,T)$$

zur Zeit $t=T$ zu stellen, dessen Lösung $u_1(x,t)$ folglich der Integralgleichung

$$u_1(x,t) = v_1(x,t) - \int_T^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

mit
$$v_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-T)\, M\{\varphi_1|\,x;t-T\}\right] + (t-T)\, M\{\psi_1|\,x;t-T\}$$

zu genügen hat. Für $t\geqq T$ gilt

$$v_1(x,t) = v(x,t) - \int_0^T (t-\tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau.$$

Man kann diese Identität sowohl mit Hilfe der Definition der Funktionen φ_1 und ψ_1 direkt verifizieren, als auch aus allgemeinen Eigenschaften der Lösungen der linearen Wellengleichung ohne Rechnung ableiten. Aus der Identität folgt, daß $v_1(x,t)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Also kann man die Integralgleichung wie im Beweis von Satz 1 durch Iteration lösen und so eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_1(x,t)$ in einem Teilbereich $T\leqq t\leqq T+T_1$ von $B(K)$ berechnen, dessen Breite T_1 nur von einer gemeinsamen oberen Schranke für die Funktionen $|\varphi_1|$, $|\operatorname{grad}\varphi_1|$ und $|\psi_1|$ abhängt. Hierfür kann man aber die Konstante c des Hilfssatzes 1 nehmen. Also hängt T_1 nur von den Anfangswerten φ, ψ in K ab. Erneute Anwendung des Fortsetzungsprozesses liefert eine Lösung für $t\leqq T+2T_1$. In endlich vielen Schritten erhält man die gesuchte Lösung in $B(K)$. Gäbe es zwei Lösungen u_1 und u_2, so müßte die Differenz der Ungleichung

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| = \left|\int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1 - F'(|u_2|^2)\, u_2\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\right|$$
$$\leqq c_7 \int_0^t (t-\tau) \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)|\,d\tau$$

genügen, worin c_7 die im Beweis des Hilfssatzes eingeführte Konstante ist. Daraus folgt $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ in bekannter Weise, womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist.

§ 3. Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten

Die in §2 betrachteten Wellengleichungen haben zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ genau eine für $t \geqq 0$ und für alle x zweimal stetig differenzierbare Lösung $u(x,t)$. Es werden nun insbesondere Anfangswerte *mit kompaktem Träger betrachtet*, d.h. solche, die außerhalb einer geeigneten Kugel $K = K_\varrho(x_0)$ identisch verschwinden. Die Lösung $u(x,t)$ verschwindet dann identisch im Bestimmtheitsbereich des Komplementes von K, d.h. für festes t außerhalb der Kugel $K_{\varrho+t}(x_0)$. Wegen $F(0) = 0$ existiert das *Energie-Integral*

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \int_{R^3} \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F(|u|^2)\}\, dx .$$

Aus dem Energiesatz folgt durch Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq \tau$ der sog. integrale Energiesatz

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\}\, dx$$

für $t \geqq 0$, d.h. $E(t)$ ist gleich einer nur von den Anfangswerten abhängigen Konstanten, die im folgenden mit E bezeichnet wird. Ist $F(s) \geqq 0$ für $0 \leqq s < \infty$, so folgt hieraus eine wichtige Abschätzung. Für eine Funktion $f(x) \in C^1(R^3)$ mit kompaktem Träger gilt nämlich nach SOBOLEW[3])

$$\{\int |f(x)|^6\, dx\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{4}{3} \int |\operatorname{grad} f(x)|^2\, dx .$$

Auf $u(x,t)$ angewandt ergibt dies die Ungleichung

$$\{\int |u(x,t)|^6\, dx\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{8}{3} E ,$$

die im folgenden gebraucht wird. Eine weitere Ungleichung enthält

HILFSSATZ 2. *Es seien $\varphi(x) \in C^3(R^3)$ und $\psi(x) \in C^2(R^3)$ Funktionen mit kompaktem Träger und $v(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ mit diesen Anfangswerten. Dann gilt*

$$\int |v(x,t)|^2\, dx \leqq 2 \int \{|\varphi(x)|^2 + t^2 |\psi(x)|^2\}\, dx .$$

BEWEIS. Sei $\hat{v}(\xi,t)$ die Fourier-Transformierte von $v(x,t)$ bezüglich der Raumvariablen, $\hat{\varphi}(\xi)$ und $\hat{\psi}(\xi)$ die Transformierten von $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$; dann ist

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi) \cos|\xi|\, t + \hat{\psi}(\xi) \frac{\sin|\xi|\, t}{|\xi|}$$

und folglich

$$\int |v(x,t)|^2\, dx = \int |\hat{v}(\xi,t)|^2\, d\xi$$
$$\leqq 2 \int \{|\hat{\varphi}(\xi)|^2 + t^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2\}\, d\xi = 2 \int \{|\varphi(x)|^2 + t^2 |\psi(x)|^2\}\, dx .$$

[3]) Einen einfachen Beweis findet man bei NIRENBERG [4], S. 128.

Der Hilfssatz 2 zeigt, zusammen mit dem integralen Energiesatz für die lineare Wellengleichung $(F(s)=0)$, daß die Lösungen der linearen Wellengleichung im Sinne der Norm

$$\|v(t)\| = \left[\int\left\{|v_t|^2 + |\operatorname{grad} v|^2 + |v|^2\right\} dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

stetig von ihren Anfangswerten abhängen; und zwar ist

$$\|v(t)\|^2 \leqq 2(1+t^2)\,\|v(0)\|^2$$

für jede Lösung $v(x,t)$, also auch für die Differenz zweier Lösungen. Unter gewissen Voraussetzungen gilt nun eine analoge Aussage für die nichtlinearen Wellengleichungen:

Satz 3. *Außer den Voraussetzungen von Satz 2 gelte noch*

$$F(s) \geqq 0 \quad \textit{und} \quad |F''(s)| \leqq b \quad \textit{für} \quad 0 \leqq s < \infty.$$

Es seien $\varphi_i(x) \in C^3(R^3)$, $\psi_i(x) \in C^2(R^3)$ *Anfangswerte mit kompaktem Träger und mit*

$$E_i = \tfrac{1}{2}\int\left\{|\psi_i|^2 + |\operatorname{grad}\varphi_i|^2 + F\left(|\varphi_i|^2\right)\right\} dx \leqq \hat{E}$$

für $i=1,2$. *Für die zugehörigen Lösungen* $u_i(x,t)$ *gilt dann*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\exp\left[k(1+t^4)\right]\|u_1(0) - u_2(c)\|^2$$

mit einer nur von $\hat{E}$ *(und von der Funktion* $F(s)$*) abhängigen Zahl* k.

Bemerkung. Ersetzt man die Bedingung $F(s) \geqq 0$ durch die frühere $A + F(s) > 0$, so erhält man eine ähnliche Ungleichung; jedoch hängt die darin auftretende Konstante auch von A und von dem Durchmesser des Trägers der Anfangswerte ab.

Beweis des Satzes. Aus den Voraussetzungen über $F(s)$ folgt $|F'(s)| \leqq |F'(0)| + bs$ und daraus

$$\left|F'\left(|z_1|^2\right)z_1 - F'\left(|z_2|^2\right)z_2\right| \leqq b_1\left(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2\right)|z_1 - z_2|$$

für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 mit einer positiven Konstante b_1[4]). Die Lösungen $u_i(x,t)$ sind zugleich Lösungen der Integralgleichungen

$$u_i(x,t) = v_i(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\, M\left\{F'\left(|u_i|^2\right)u_i \mid x, \tau; t-\tau\right\} d\tau,$$

worin $v_i(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung mit den Anfangswerten φ_i, ψ_i ist. Setzt man $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ so folgt

$$|w(x,t)| \leqq |v_1(x,t) - v_2(x,t)| + \\ + b_1 \int_0^t (t-\tau)\, M\left\{\left(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2\right)|w| \mid x, \tau; t-\tau\right\} d\tau$$

[4]) An Stelle von $|F''(s)| \leqq b$ könnte man auch diese Ungleichung in die Voraussetzungen des Satzes aufnehmen.

und weiter

$$\begin{aligned}
&\left[\int |w(x,t)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \left[\int |v_1(x,t)-v_2(x,t)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + b_1 \int_0^t (t-\tau)\left[\int \left(1+|u_1(x,\tau)|^2+|u_2(x,\tau)|^2\right)^2 |w(x,\tau)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leqq \left[2\int\{|\varphi_1-\varphi_2|^2+t^2|\psi_1-\psi_2|^2\}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + b_1 t \int_0^t \left\{\left[\int |w(x,\tau)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int \left(|u_1|^2+|u_2|^2\right)^3 dx\right]^{\frac{1}{3}}\left[\int |w(x,\tau)|^6\,dx\right]^{\frac{1}{6}}\right\} d\tau \\
&\leqq \left[2(1+t^2)\right]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + \\
&\quad + b_1 t \int_0^t \left\{\left[\int |w(x,\tau)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} + \tfrac{16}{3}\widehat{E}\,(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}}\left[\int |\operatorname{grad} w(x,\tau)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\} d\tau \\
&\leqq \left[2(1+t^2)\right]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + b_2 t \int_0^t \|w(\tau)\|\,d\tau
\end{aligned}$$

mit einer nur von $\widehat{E}$ (und von b_1) abhängigen Zahl b_2. Dabei wurde Hilfssatz 2, die zu Anfang des Paragraphen abgeleitete Ungleichung und die Ungleichung von SOBOLEW angewandt. Schließlich erhält man

$$\int |w(x,t)|^2\,dx \leqq 4(1+t^2)\,\|w(0)\|^2 + 2b_2^2 t^3 \int_0^t \|w(\tau)\|^2\,d\tau .$$

Andererseits folgt aus der Wellengleichung

$$w_{tt} - \Delta w + F'(|u_1|^2)\,u_1 - F'(|u_2|^2)\,u_2 = 0$$

und daraus

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\{|w_t|^2 + |\operatorname{grad} w|^2\} - 2\operatorname{Re}\operatorname{div}(\overline{w}_t \operatorname{grad} w) \\
&\qquad = -2\operatorname{Re}\overline{w}_t\left[F'(|u_1|^2)\,u_1 - F'(|u_2|^2)\,u_2\right].
\end{aligned}$$

Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq t_0$ liefert

$$\begin{aligned}
&\int\{|w_t(x,t_0)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t_0)|^2\}\,dx - \int\{|\psi_1-\psi_2|^2 + |\operatorname{grad}(\varphi_1-\varphi_2)|^2\}\,dx \\
&\quad = -2\operatorname{Re}\int_0^{t_0}\int \overline{w}_t\left[F'(|u_1|^2)\,u_1 - F'(|u_2|^2)\,u_2\right] dx\,dt \\
&\quad \leqq 2b_1 \int_0^{t_0}\int |w_t|\cdot\left(1+|u_1|^2+|u_2|^2\right)|w|\,dx\,dt \\
&\quad \leqq 2b_1 \int_0^{t_0}\left[\int |w_t|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int \left(1+|u_1|^2+|u_2|^2\right)^2 |w|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} dt .
\end{aligned}$$

Das Integral in der zweiten eckigen Klammer ist schon einmal in diesem Beweis vorgekommen; indem man dieselbe Abschätzung wie dort anwendet, erhält man

$$\int\{|w_t(x,t)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t)|^2\}\,dx \leqq \|w(0)\|^2 + 2b_2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2\,d\tau$$

und durch Addition der Ungleichung für $\int |w(x,t)|^2\,dx$

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\,\|w(0)\|^2 + 2(b_2 + b_2^2 t^3)\int_0^t \|w(\tau)\|^2\,d\tau .$$

Hieraus folgt

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\exp[k(1+t^4)]\,\|w(0)\|^2$$

mit einer nur von b_2, d.h. nur von $\widehat{E}$ abhängigen Zahl k, q.e.d.

Aus Satz 3 folgt fast unmittelbar die *stetige Abhängigkeit* der Lösungen von den Anfangswerten im Sinne der Norm, zunächst für Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben. Sei φ_n, ψ_n eine Folge solcher Anfangswerte, die im Sinne der Norm konvergiert. Es sei also

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\{|\psi_n-\psi_m|^2+|\operatorname{grad}(\varphi_n-\varphi_m)|^2+|\varphi_n-\varphi_m|^2\}\,dx = \lim_{n,m\to\infty}\|u_n(0)-u_m(0)\|^2=0.$$

Aus Satz 3 folgt dann für die Lösungen $u_n(x,t)$

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n(t)-u_m(t)\|=0$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0\leqq t\leqq t_0$, falls nur die Folge der Energie-Konstanten E_n beschränkt ist. Nun ist nach Voraussetzung

$$|F(s)|\leqq|F'(0)|\,s+\tfrac{1}{2}b\,s^2\leqq b_3(s+s^3)$$

und daher nach der Ungleichung von Sobolew

$$E_n\leqq\frac{1}{2}\int\{|\psi_n|^2+|\operatorname{grad}\varphi_n|^2+b_3|\varphi_n|^2+b_3|\varphi_n|^6\}\,dx$$
$$\leqq\frac{1+b_3}{2}\|u_n(0)\|^2+\frac{1}{2}b_3\left(\frac{4}{3}\right)^3\|u_n(0)\|^6\leqq\widehat{E},\quad\text{q.e.d.}$$

Für Lösungen in $B(G)$, G eine offene Menge in R^3, gilt folgendes: Sei $\varphi_n(x)\in C^3(G)$, $\psi_n(x)\in C^2(G)$ eine Folge von Anfangswerten und konvergent in dem Sinne, daß

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_K\{|\psi_n-\psi_m|^2+|\operatorname{grad}(\varphi_n-\varphi_m)|^2+|\varphi_n-\varphi_m|^2\}\,dx = \lim_{n,m\to\infty}\|u_n(0)-u_m(0)\|_K^2=0$$

für jede Kugel $K=K_\varrho(x_0)$ mit $\overline{K}\subset G$. Dann gilt für die Lösungen

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n(t)-u_m(t)\|_{K_{\varrho-t}(x_0)}=0$$

für jede solche Kugel gleichmäßig bezüglich t im Intervall $[0,\varrho]$. Zum Beweis wählt man ein $\varepsilon>0$, so daß auch noch $\overline{K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)}\subset G$ ist, und eine Funktion $\eta(x)\in C^3(R^3)$ mit Träger in $K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)$, welche in $K_\varrho(x_0)$ identisch gleich 1 ist. Damit bildet man Anfangswerte $\varphi_n'=\eta\varphi_n$, $\psi_n'=\eta\psi_n$ mit kompaktem Träger und die zugehörigen Lösungen $u_n'(x,t)$. Nach Voraussetzung ist dann

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n'(0)-u_m'(0)\|=0$$

und die Folge $u_n'(x,t)$ konvergiert daher im Sinne der Norm gleichmäßig bezüglich t. Da nun aber $u_n'(x,t)\equiv u_n(x,t)$ in $B(K_\varrho(x_0))$ ist, so folgt die Behauptung unmittelbar.

§ 4. Verallgemeinerte Lösungen

Die Paare $\{\varphi, \psi\}$ von Funktionen $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ mit kompaktem Träger bilden einen linearen Raum $\mathfrak{H}_0$. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{H}_0$ bezüglich der Norm

$$\|\varphi, \psi\| = \left[\int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + |\varphi|^2\}\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. Die Elemente $\{\varphi, \psi\}$ von $\mathfrak{H}$ sollen *verallgemeinerte Anfangswerte* genannt werden; diese kann man auch beschreiben als Paare komplexwertiger Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, definiert und quadratisch integrierbar über R^3 mitsamt den ersten Ableitungen von $\varphi(x)$ im Sinne der Distributionstheorie.

Für $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}_0$ ist das Energie-Integral

$$E\{\varphi, \psi\} = \tfrac{1}{2} \int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\}\, dx$$

definiert; nach einer Abschätzung in §3 ist

$$E\{\varphi, \psi\} \leqq \frac{1 + b_3}{2} \|\varphi, \psi\|^2 + \frac{32}{27} b_3 \|\varphi, \psi\|^6$$

unter den Voraussetzungen von Satz 3 über $F(s)$ mit einer nur von $F(s)$ abhängigen Konstante b_3. Ist nun $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ und $\{\varphi_n, \psi_n\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{H}_0$, welche gegen $\{\varphi, \psi\}$ strebt, so konvergiert die Folge der Lösungen $u_n(x, t)$ des Anfangswertproblems nach Satz 3 im Sinne der Norm

$$\|u(t), u_t(t)\| = \left[\int \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2\}\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ und definiert eine für $t \geqq 0$ stetig von t abhängende Schar von Elementen $\{u(t), u_t(t)\} \in \mathfrak{H}$, die als *verallgemeinerte Lösung* des Anfangswertproblems mit den Anfangswerten $\{\varphi, \psi\}$ bezeichnet werden soll. Diese Definition ist sinnvoll, da die Schar $\{u(t), u_t(t)\}$ durch $\{\varphi, \psi\}$ eindeutig bestimmt ist. Die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ erfüllen die allgemeinsten der in [2] von FRIEDRICHS und LEWY für die lineare Wellengleichung angegebenen *fortsetzbaren* Anfangsbedingungen. Das obige Ergebnis zeigt, daß dies auch für die nichtlineare Wellengleichung fortsetzbare Anfangsbedingungen sind. Man kann noch bessere Übereinstimmung mit [2] erzielen, indem man auch für die nichtlineare Wellengleichung verallgemeinerte Lösungen in beliebigen Bestimmtheitsbereichen $B(G)$ definiert, die Methode hierzu ist am Ende des §3 schon angegeben worden.

Zur Definition des Energie-Integrals für verallgemeinerte Lösungen benützt man den folgenden

HILFSSATZ 3. *$F(s)$ genüge den Voraussetzungen von Satz 3. Dann ist $E\{\varphi, \psi\}$ eine stetige Funktion von $\{\varphi, \psi\}$ im Sinne der Norm.*

BEWEIS. Aus $|F''(s)| \leqq b$ folgt

$$|F(|z_1|^2) - F(|z_2|^2)| \leqq b_4 (1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)\, (|z_1| + |z_2|)\, |z_1 - z_2|$$

und damit für $\{\varphi_i, \psi_i\} \in \mathfrak{H}_0$

$$\begin{aligned}
&\left|\int \{F(|\varphi_1|^2) - F(|\varphi_2|^2)\}\, dx\right| \\
&\quad \leqq b_4 \left[\int (1 + |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^2 (|\varphi_1| + |\varphi_2|)^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int |\varphi_1 - \varphi_2|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\left[\int (|\varphi_1| + |\varphi_2|)^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[2 \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^3\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\| + \sqrt{8} \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned}
&|E\{\varphi_1, \psi_1\} - E\{\varphi_2, \psi_2\}| \\
&\leqq \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\frac{1 + b_4}{2} \left(\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\|\right) + \sqrt{2} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} b_4 \left(\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3\right)\right\},
\end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 4. *Für eine verallgemeinerte Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ existieren die Integrale*

$$\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{2} \int \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F(|u|^2)\}\, dx \\
\mathfrak{P} &= -\int \operatorname{Re}(\bar{u}_t \operatorname{grad} u)\, dx \\
Q &= -\int \operatorname{Im}(\bar{u}_t u)\, dx
\end{aligned}$$

(Energie, Impuls und Ladung) für $t \geqq 0$ und sind von t unabhängig. Die Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ sowie die obigen Integrale hängen stetig im Sinne der Norm von den Anfangswerten ab. Satz 3 gilt unverändert für verallgemeinerte Lösungen.

Beweis. Sei $u_n(x, t)$ eine Folge von eigentlichen Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben und gegen die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\}$ der verallgemeinerten Lösung streben. Da $u_n(x, t)$ bei festem t für hinreichend große x verschwindet, existieren die entsprechenden Integrale E_n, $\mathfrak{P}_n$, Q_n. Durch Differentiation nach t unter dem Integralzeichen und mit Benutzung der Differentialgleichung verifiziert man leicht, daß die Integrale von t nicht abhängen. Die Behauptung folgt nun durch Grenzübergang, da E nach Hilfssatz 3 stetig im Sinne der Norm von u abhängt und da dies für $\mathfrak{P}$ und für Q offenbar auch der Fall ist. Die Ungleichung von Satz 3 geht durch Grenzübergang über in

$$\|u_1(t) - u_2(t), u_{1t}(t) - u_{2t}(t)\|^2 \leq 5(1 - t^2) \exp\left[k(1 + t^4)\right] \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\|^2$$

mit einer nur von $\max[E\{\varphi_1, \psi_1\}, E\{\varphi_2, \psi_2\}]$ abhängigen Zahl k. Daraus folgt die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten.

Der Satz zeigt, daß die verallgemeinerten Lösungen alle physikalisch wichtigen Eigenschaften besitzen; zugleich ist klar, daß man den Raum $\mathfrak{H}$ der Anfangswerte nicht wesentlich erweitern kann, ohne die Existenz des Energie-Integrals aufzugeben. Für manche Funktionen $F(s)$, so z.B. für die zur Mesonengleichung von Schiff gehörende Funktion $F(s) = \mu^2 s + \frac{1}{2}\eta^2 s^2$, ist sogar $\mathfrak{H}$ *identisch* mit der Klasse der Anfangswerte mit endlichem Energie-Integral. Ohne Zweifel sind daher die hier konstruierten verallgemeinerten Lösungen die allgemeinsten Lösungen mit physikalischer Bedeutung. Während nun die

Theorie in *dieser* Hinsicht wenig zu wünschen übrig läßt, bleibt hinsichtlich der Klasse der betrachteten Wellengleichungen manche Frage offen. Insbesondere wäre es nützlich, zu wissen, ob es Funktionen $F(s)$ von stärkerem Wachstum gibt, für die das Anfangswertproblem im Großen in ähnlicher Allgemeinheit lösbar ist.

Zusatz bei der Korrektur am 28. 9. 61. J. L. Lions hat dem Verf. im Juni 1961 noch unveröffentlichte weitergehende Resultate in bezug auf die verallgemeinerten Lösungen mitgeteilt. Seine Methode liefert direkt die verallgemeinerte Lösung der entsprechenden inhomogenen Differentialgleichung in beliebig vielen (n) Raumvariablen unter Voraussetzungen, die für $n = 3$ mit denen von Satz 3 übereinstimmen, und erlaubt außerdem die Lösung gemischter Rand-Anfangswert-Probleme für dieselbe Gleichung.

Literatur

[1] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937.

[2] Friedrichs, K., u. H. Lewy: Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen. Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932, 135—143.

[3] Jörgens, K.: Über die nichtlinearen Wellengleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen **138**, 179—202 (1959).

[4] Nirenberg, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. III **13**, 115—162 (1959).

[5] Schiff, L. I.: Nonlinear meson theory of nuclear forces I. Physic. Rev. **84**, 1—9 (1951).

[6] Sobolew, S.: Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. Mat. Sbornik **4**, 471—496 (1938).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 15. April 1961)

Schmidt, H.
Math. Zeitschr. 77, 309–313 (1961)

Eine Anwendung der Siegelschen Transzendenzsätze für Bessel-Funktionen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Hermann Schmidt

Einleitung. Die folgenden Betrachtungen sind ursprünglich angeregt durch eine Bemerkung von Dietrich und Rosenthal [1]; diese ersetzen die Zahlfolge (1, 1, ...) der Koeffizientenzähler in der Exponentialreihe durch eine periodische Folge algebraischer Zahlen, wodurch man zu einer Linearkombination gewisser Teilreihen derselben (zyklischer Funktionen) gelangt und den Lindemannschen Satz anwenden kann. Es lag nahe, die Bedingung der Periodizität durch eine allgemeinere lineare Differenzengleichung mit festen algebraischen Koeffizienten für die Folge der Zusatzfaktoren zu ersetzen; *Satz* 1, zu dem man auf diese Weise gelangt, erwies sich nachträglich als im wesentlichen in einem Satz von Popken [4] enthalten; doch ist dort der Ausgangspunkt ein anderer (unendliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten), so daß ein Teil des hier wiedergegebenen, auf Formeln der Differenzenrechnung fußenden Beweises zur Herstellung des Zusammenhangs ohnedies erforderlich ist (Gewinnung der Aussage des Lemmas a.a.O. [4], S. 524); anderseits geben wir gewisse algebraische Verschärfungen (*Satz* 2), und schließlich führt im wesentlichen die gleiche Methode zur Gewinnung entsprechender Ergebnisse für in ähnlicher Weise aus jenen Funktionen $K_\alpha(x)$ abzuleitende Reihen, die Siegel in seinen berühmten Transzendenzuntersuchungen [5], Ch. II behandelt hat, und die in naher Beziehung zu den Bessel-Funktionen stehen (*Satz* 3). Hier liegt zunächst nur die Methode der Differenzengleichungen vor; Differentialgleichungen (mit nicht konstanten Koeffizienten) würden sich wohl herleiten lassen, doch dürften solche kaum einen vereinfachten Zugang zu unseren Ergebnissen, vielleicht aber Anregung zu weiteren Verallgemeinerungen bieten.

Satz 1. *Die Zahlfolge A_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) genüge für $\nu \geqq \nu_0$ ($\geqq 0$ fest) der linearen Differenzengleichung (in bekannter Symbolik links)*

$$f(\mathsf{E})\, A_\nu = A_{\nu+m} + \beta_1 A_{\nu+m-1} + \cdots + \beta_m A_\nu = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten β_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) ebenso wie die gegebenen Werte A_μ ($\mu = 0, 1, \ldots, \nu_0 + m - 1$) algebraische Zahlen sein mögen, $\beta_m \neq 0$. Wenn dann die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{2}$$

nicht abbricht, stellt sie eine ganze Funktion dar, die für höchstens endlich viele algebraische Werte von z algebraische Werte annimmt.

BEWEIS. Es sei zunächst $\nu_0 = 0$ angenommen. Setzt man

$$f(t) = \prod_{\lambda=1}^{l} (t - \varrho_\lambda)^{k_\lambda} \qquad (\sum k_\lambda = m;\ \varrho_\lambda \neq \varrho_\mu \quad \text{für} \quad \lambda \neq \mu),$$

so sind die ϱ_λ algebraisch und wegen $\beta_m \neq 0$ sämtlich von Null verschieden. Die Differenzengleichung (1) hat dann für $\nu \geqq 0$ das Fundamentalsystem

$$\left\{\varrho_\lambda^\nu,\ \nu\,\varrho_\lambda^\nu,\ \binom{\nu}{2}\varrho_\lambda^\nu,\ \ldots\ \binom{\nu}{k_\lambda - 1}\varrho_\lambda^\nu\right\} \qquad \lambda = 1, \ldots, l,$$

(vgl. z.B. MARKOFF [2], S. 166/167; NÖRLUND [3], S. 297), und es gibt daher eine Darstellung

$$(3) \qquad A_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} p_\lambda(\nu)\,\varrho_\lambda^\nu \quad \text{mit Polynomen} \quad p_\lambda(t) = \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa}\binom{t}{\varkappa}.$$

Die Beiwerte $c_{\lambda\varkappa}$ derselben sind algebraische Zahlen, da sie sich durch Auflösung der linearen Gleichungen (3) ($\nu = 0, 1, \ldots, m-1$) mit nichtsingulärer Matrix berechnen. Weiter folgt durch Einsetzen in (2)

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!} z^\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} q_\lambda(z)\, e^{\varrho_\lambda z},$$

wenn man setzt

$$q_\lambda(z) = \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}}{\varkappa!}\,\varrho_\lambda^\varkappa z^\varkappa;$$

nicht alle Polynome $q_\lambda(z)$ können identisch verschwinden, da nach Vor. $F(z)$ dies nicht tut.

Nach dem großen Lindemannschen Satz (vgl. z.B. SIEGEL [5], S. 23) ist daher, da die ϱ_λ voneinander und von Null verschieden sind, für algebraisches $z = \zeta \neq 0$ $F(\zeta)$ transzendent, wofern nicht alle $q_\lambda(\zeta) = 0$ ausfallen (man denke sich $F(\zeta)$ mit dem Faktor $1 = e^{0 \cdot \zeta}$ geschrieben). Ist daher $d(z) = z^s + \cdots$ der (normierte) größte gemeinsame Teiler der $q_\lambda(z)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$), so wird $0 \leqq s \leqq h = \mathrm{Max}(k_\lambda - 1)$, und genau wenn $d(z)$ eine Nullstelle $\neq 0$ besitzt, gibt es eine, und zwar endliche, Anzahl $s_0 \leqq s$ von algebraischen Stellen $\zeta_j \neq 0$ mit algebraischem $F(\zeta_j)$ ($= 0$ bei der gemachten Annahme $\nu_0 = 0$). Insbesondere ist also $F(\zeta)$ für *jedes* algebraische $\zeta \neq 0$ transzendent, wenn alle ϱ_λ *einfache* Nullstellen von $f(t)$ sind; hier ordnet sich insbesondere der Fall von DIETRICH und ROSENTHAL [1] ein.

Ist nun $\nu_0 > 0$, so schreiben wir für $\nu \geqq \nu_0$ auch $A_\nu = A_\nu^*$, und definieren ferner schrittweise für $\nu = \nu_0 - 1,\ \nu_0 - 2,\ \ldots,\ 1,\ 0$

$$A_\nu^* = -\frac{1}{\beta_m}\left(A_{\nu+m}^* + \beta_1 A_{\nu+m-1}^* + \cdots + \beta_{m-1} A_{\nu+1}^*\right).$$

Alsdann wird $F(z)=P(z)+F^*(z)$, wo

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1}(A_\nu-A_\nu^*)\frac{z^\nu}{\nu!}$$

ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten ist, während

$$F^*(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_\nu^*}{\nu!}z^\nu$$

die Voraussetzungen von Satz 1 mit $\nu_0=0$ erfüllt, insbesondere nicht identisch verschwindet, da $F(z)$ kein Polynom sein sollte. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Es sei jetzt P der Körper der rationalen Zahlen, K der algebraische Zahlkörper $\mathsf{P}(\beta_1,\ldots,\beta_m;\ A_0,\ldots,A_{\nu_0+m-1})$, $K_\lambda=K(\varrho_\lambda)$, $\Lambda=K(\varrho_1,\ldots,\varrho_l)$ $(\lambda=1,2,\ldots,l)$. Wir beweisen jetzt

Satz 2. *Wenn es unter den Vor. von Satz 1 ein algebraisches ζ mit algebraischem $F(\zeta)$ gibt, so ist $F(\zeta)\in K(\zeta)$, und der Relativgrad $[K(\zeta):K]$ ist $\leqq h=\mathrm{Max}(k_\lambda-1)$, wo k_λ die Vielfachheiten der Wurzeln von $f(t)=0$ sind.*

Für $\zeta=0$ ist dies trivial. Im übrigen sind ja alle A_ν und A_ν^*, damit die Koeffizienten von $P(z)$ aus K, woraus für $\zeta\neq 0$ wegen $F(\zeta)=P(\zeta)$ der erste Teil der Behauptung folgt.

Aus (3) folgt weiter, daß $c_{\lambda\varkappa}\in\Lambda$. Ist π ein Automorphismus von Λ/K, und wird dabei $\varrho_\lambda^\pi=\varrho_{\pi(\lambda)}$, so ergibt sich wegen $A_\nu\in K$ und mit Rücksicht auf $k_{\pi^{-1}(\lambda)}=k_\lambda$

$$A_\nu=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda-1}c_{\lambda\varkappa}^\pi\cdot\binom{\nu}{\varkappa}\varrho_{\pi(\lambda)}^\varkappa=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda-1}c_{\pi^{-1}(\lambda),\varkappa}^\pi\binom{\nu}{\varkappa}\varrho_\lambda^\nu,$$

also

$$c_{\lambda\varkappa}=c_{\pi^{-1}(\lambda),\varkappa}^\pi \quad\text{oder}\quad c_{\lambda,\varkappa}^\pi=c_{\pi(\lambda),\varkappa};\qquad q_\lambda^\pi(z)=q_{\pi(\lambda)}(z). \tag{6}$$

Insbesondere bleibt $q_\lambda(z)$ bei einem Automorphismus von Λ/K_λ unverändert, da dann $\varrho_\lambda^\pi=\varrho_\lambda$, somit ist $q_\lambda(z)\in K_\lambda[z]$[1]. Wegen (6) folgt aus $d(z)/q_\lambda(z)$ für alle λ, daß auch $d^\pi(z)/q_\lambda(z)$ für alle λ und alle Automorphismen π von Λ/K. Es gilt also auch $d^\pi(z)/d(z)$, und wegen der Normierung und der Gleichheit der Grade ist $d^\pi(z)=d(z)$, also $d(z)\in K[z]$; daraus ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Mit ähnlicher Methode untersuchen wir nun noch eine weitere Klasse von Funktionen.

Satz 3. *Die Folge A_ν genüge den Voraussetzungen von Satz 1. Es sei ferner α eine rationale Zahl $\neq -1,-2,\ldots$ und nicht die Hälfte einer ungeraden Zahl. Dann gelten die Aussagen von Satz 1 und 2 auch für die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu A_\nu z^\nu}{\nu!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)},$$

wofern jetzt unter h das $\mathrm{Max}[k_\lambda/2]$ verstanden wird.

[1]) Meinen ursprünglichen, etwas weitläufigeren, mehr funktionentheoretischen Beweis hierfür habe ich auf Vorschlag von Herrn Knobloch durch die obige rein algebraische Betrachtung ersetzt.

BEWEIS. Es sei wieder $\nu_0 = 0$ angenommen, da die Reduktion auf diesen Fall analog verläuft.

Auf Grund der Darstellung (3) findet man jetzt

$$(7)\qquad \begin{cases} F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}}{\varkappa!} \sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\varrho_\lambda z)^\nu}{(\nu-\varkappa)!\,(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu)} \\ \quad = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{x_\lambda}{2}\right)^{-\alpha+\varkappa} J_{\alpha+\varkappa}(x_\lambda). \end{cases}$$

Hier bedeutet x_λ eine $\sqrt{4\varrho_\lambda z}$,

$$J_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\alpha+\nu+1)}$$

die Besselsche Funktion vom Index α. Es gilt aber bekanntlich (vgl. z.B. WATSON [6], S. 295 (1))

$$(8)\qquad J_{\alpha+\varkappa}(x) = R_{\varkappa-1,\alpha+1}(x)\, J_{\alpha+1}(x) - R_{\varkappa-2,\alpha+2}(x)\, J_\alpha(x) \qquad (\varkappa \geqq 2),$$

wobei wie a.a.O. mit $R_{n,\alpha}(x)$ die sog. Lommelschen Polynome bezeichnet sind. Es ist in unserem Zusammenhang angebracht, zu der Hurwitzschen Schreibweise überzugehen, d.h. mit WATSON [6], 9.7, S. 303 zu setzen

$$g_{n\alpha}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^n R_{n,\alpha+1}(x) \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Dann gilt

$$g_{n+1,\alpha}(x) = (\alpha + n + 1)\, g_{n,\alpha}(x) - x\, g_{n-1,\alpha}(x);$$

$$g_{0\alpha}(x) = 1, \qquad g_{1\alpha}(x) = \alpha + 1,$$

und demgemäß sind, da nach Vor. $\alpha \in \mathsf{P}$, die $g_{n\alpha}(x)$ Polynome $\in \mathsf{P}[x]$, und zwar von einem Grade $\leqq n/2$. Weiter ist jetzt für $\varkappa \geqq 2$ nach (8)

$$(9)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+\varkappa} J_{\alpha+\varkappa}(x) = g_{\varkappa-1,\alpha}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+1} J_{\alpha+1}(x) - \frac{x^2}{4}\, g_{\varkappa-2,\alpha+1}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x).$$

Setzt man nun mit SIEGEL [5], 59 (89) (91)

$$K_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x),$$

so wird nach (7), (9) schließlich

$$(10)\qquad F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda(z)\, K_\alpha\left(2\sqrt{\varrho_\lambda z}\right) + Q_\lambda(z)\, \frac{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\varrho_\lambda z})}{\alpha+1}.$$

Dabei ist gesetzt (leere Summen sind Null!)

$$(11)\qquad \begin{cases} P_\lambda(z) = c_{\lambda 0} - \varrho_\lambda z \sum_{\varkappa=2}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}\, g_{\varkappa-2,\alpha+1}(\varrho_\lambda z) \\ Q_\lambda(z) = \varrho_\lambda z \sum_{\varkappa=1}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}\, g_{\varkappa-1,\alpha}(\varrho_\lambda z). \end{cases}$$

Es sind also $P_\lambda(z)$, $Q_\lambda(z)$ Polynome, die nicht alle identisch verschwinden, vom Grade $\leqq k_\lambda/2$, und mit Koeffizienten $\in K_\lambda$, wie sofort aus (6), (11) hervorgeht. Vermöge der Formel

$$\frac{x}{2}\,\frac{K_{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} = -K'_\alpha(x)$$

kann auch noch $K_{\alpha+1}$ aus (10) entfernt werden.

Nach SIEGEL [5], §14, S. 73 sind nun für algebraische ξ_λ mit voneinander und von Null verschiedenen Quadraten ξ_λ^2 die $2l$ Werte $K_\alpha(\xi_\lambda)$, $K'_\alpha(\xi_\lambda)$ oder auch $K_\alpha(\xi_\lambda)$, $K_{\alpha+1}(\xi_\lambda)$ über dem Körper aller algebraischen Zahlen algebraisch unabhängig. Indem wir $2\sqrt{\varrho_\lambda}\zeta = \xi_\lambda$ setzen, schließen wir aus der linearen Relation (10) für $z=\zeta$, daß $F(\zeta)$ für algebraisches $\zeta \neq 0$ genau dann algebraisch ausfällt, wenn ζ eine von Null verschiedene Nullstelle des größten gemeinsamen Teilers $D(z)$ der sämtlichen Polynome $P_\lambda(z)$, $Q_\lambda(z)$ ist. Wie bei (6) folgt, daß $D(z) \in K[z]$; ferner ist diesmal Grad $D(z) \leqq \text{Max } \frac{k_\lambda}{2}$, und damit ist Satz 3 bewiesen.

Die letzte Aussage in Satz 2 bzw. 3 hat insbesondere zur Folge, daß $F(\zeta)$, sicher transzendent wird, wenn ζ eine algebraische Zahl von einem Grad $> h$ über K bedeutet. — Für $k_\lambda \leqq 2$ sind etwa vorhandene $\zeta_j \in K$.

Literatur

[1] DIETRICH, E., and A. ROSENTHAL: Transcendence of factorial series with periodic coefficients. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 954—956 (1949).

[2] MARKOFF, A. A.: Differenzenrechnung. Leipzig 1896.

[3] NÖRLUND, N. E.: Differenzenrechnung. Berlin 1924.

[4] POPKEN, J.: An arithmetical theorem concerning linear differential equations of infinite order. Indag. math. Amsterdam **12**, 522—533 (1950) (mit weiteren Lit.-Hinweisen).

[5] SIEGEL, C. L.: Transcendental numbers. Ann. math. studies, **16**. Princeton University Press 1949.

[6] WATSON, G. N.: Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge University Press 1922.

[7] SCHNEIDER, TH.: Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin 1957. V. Kapitel.

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. April 1961)

Berger, R., u. E. Kunz
Math. Zeitschr. 77, 314—338 (1961)

Über die Struktur der Differentialmoduln von diskreten Bewertungsringen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidm

Von

Robert Berger und Ernst Kunz

Die Struktur der Differentialmoduln diskreter Bewertungsringe wurde z erst von E. Kähler (in seiner Arbeit [6]) studiert. Die Kählersche Theor wurde von F. K. Schmidt in unveröffentlichten Untersuchungen weitergefül und wesentlich verfeinert. Aufbauend auf Ergebnissen von F. K. Schmidt u an seine Gedankengänge anknüpfend soll im folgenden eine Strukturunte suchung der Differentialmoduln diskreter Bewertungsringe vorgenommen we den, wobei im Unterschied zu Kähler die Endlichkeit des Differentialmodu nicht vorausgesetzt wird. Die Verfasser danken Herrn Professor F. K. Schmi herzlich für die wertvollen Anregungen, durch die er ihre Arbeit gefördert ha

Während in der Kählerschen Theorie die Berechnung bzw. Abschätzu der Differenten im Vordergrund steht, wird im folgenden das Hauptgewic auf die Zerlegung des Differentialmoduls in eine direkte Summe von möglich einfachen Untermoduln gelegt. Die Struktur eines Moduls wird als bekan angesehen, wenn es gelungen ist, ihn in eine direkte Summe von direkt unze legbaren Moduln zu zerlegen und wenn angegeben ist, wie oft ein direkt u zerlegbarer Modul eines gewissen Typs in der direkten Summe auftritt. Die Stru tur eines endlich erzeugbaren Moduls über einem diskreten Bewertungsring ist diesem Sinne bekannt, wenn die Elementarteiler des Moduls bekannt si Obwohl die in den meisten Anwendungen auftretenden Differentialmodu endlich erzeugbar sind, besitzen auch die nicht endlich erzeugbaren Differenti moduln ein gewisses Interesse, vor allem, weil kein notwendiges und hinr chendes Kriterium dafür bekannt ist, wann ein Differentialmodul eines d kreten Bewertungsrings endlich erzeugbar ist.

Es sei R ein diskreter Bewertungsring (vom Rang 1), P ein beliebig unitärer Unterring. Wir bezeichnen den Differentialmodul von R über P m $M(R/\mathsf{P})$. $\mathfrak{P}$ sei das Primideal, $\mathfrak{k}$ der Restklassenkörper von R und $\mathfrak{k} = Q(P/\mathfrak{P}$ der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{P} \cdot \mathsf{P}$. Anstatt den Differentialmodul $M(R$ direkt zu untersuchen, werden wir diesen Modul in den Modul $\overline{M} = \hat{R} \otimes_R M(R$ einbetten, wo $\hat{R}$ die Komplettierung von R bedeutet. Dies empfiehlt si deshalb, weil ein Modul über einem kompletten diskreten Bewertungsri eine durchsichtigere Struktur besitzt als ein Modul über einem nicht komplett diskreten Bewertungsring, z.B. gibt es nur 4 Typen von direkt unzerlegba Moduln über kompletten diskreten Bewertungsringen (man vgl. hierzu [

Cor. 2 zu Theorem 23). Die Struktur wird unter der Voraussetzung studiert, daß der Differentialmodul $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar ist. Diese Voraussetzung ist wesentlich schwächer als die Voraussetzung, daß $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist. $\overline{M}$ stimmt mit $M(R/\mathsf{P})$ überein, wenn R schon komplett ist. Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, dann ist mit der Struktur von $\overline{M}$ auch die von $M(R/\mathsf{P})$ bekannt. Im Fall, daß $M(R/\mathsf{P})$ nicht endlich erzeugbar und R nicht komplett ist, erhält man aus den Strukturaussagen für $\overline{M}$ nicht unmittelbar auch Strukturaussagen für $M(R/\mathsf{P})$. Doch besitzt $M(R/\mathsf{P})$ auf jeden Fall ein R-isomorphes Bild in $\overline{M}$.

Es wird zunächst gezeigt, daß $\overline{M}$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Zerlegung

$$\overline{M} = F \oplus T \oplus D$$

besitzt, wo F ein endlich erzeugbarer freier $\hat{R}$-Modul ist, T ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul und D ein Divisionsmodul. Die weiteren Untersuchungen konzentrieren sich dann darauf, die minimalen Erzeugendenanzahlen von F und T zu bestimmen. Sie werden durch arithmetische Invarianten der Ringerweiterung R/P ausgedrückt. (Im charakteristikungleichen Fall werden dabei über den Restklassenkörper etwas schärfere Voraussetzungen gemacht.)

Die Struktur von F ist durch die Angabe seiner minimalen Erzeugendenzahl vollständig bestimmt. T ist nach der Elementarteilertheorie eine direkte Summe von soviel zyklischen Summanden, wie der Rang von T beträgt. Die genaue Struktur von T ist bekannt, wenn auch die Annullatoren der zyklischen direkten Summanden (Elementarteiler) bekannt sind. Diese Elementarteiler können in ähnlicher Weise abgeschätzt werden, wie E. Kähler bei endlich erzeugbarem Differentialmodul die Differenten abgeschätzt hat. Darauf wird hier jedoch nicht eingegangen werden. D ist als Divisionsmodul eine direkte Summe von Untermoduln, die als $\hat{R}$-Moduln entweder zum Quotientenkörper $\hat{K}$ von $\hat{R}$ oder zu $\hat{K}/\hat{R}$ isomorph sind. Die Anzahl der direkten Summanden vom Typ $\hat{K}$ kann sofort angegeben werden, wenn man noch den Differentialmodul $M(K/\mathsf{P})$ des Quotientenkörpers K von R hinzuzieht. Es läßt sich zeigen, daß direkte Summanden vom Typ $\hat{K}/\hat{R}$ sicher nicht auftreten, wenn R die Charakteristik 0 besitzt und auch P ein diskreter Bewertungsring ist. Im allgemeinen können solche Summanden jedoch auftreten.

Die zum Beweis der Strukturtsätze benötigten Hilfsmittel werden teilweise allgemeiner entwickelt, als es später notwendig ist, da sie auch selbständiges Interesse besitzen. So enthält die Note auch einige Sätze über Differentialmoduln von Stellenringen und Sätze über die Ausdehnung von Derivationen bei diskreten Bewertungsringen.

§ 1. Eine exakte Folge für den Differentialmodul eines Stellenringes

Unter einem *Stellenring* verstehen wir einen (nicht notwendig noetherschen) kommutativen unitären Ring R, dessen Nichteinheiten ein Ideal bilden. Es sei P ein beliebiger unitärer Unterring von R und $M(R/\mathsf{P})$ der Differential-

modul von R über P. (Für die Grundtatsachen über Differentialmoduln die im folgenden als bekannt vorausgesetzt werden, vgl. man etwa [9]). Es sei $\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von R, $\mathfrak{K}$ der Restklassenkörper von R. Ferner sei $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}$, $\mathfrak{k}=Q(\mathsf{P}/\mathfrak{p})$ der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{Q}=\mathfrak{p}\cdot R$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{p}$ in R. Hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik $p>0$, so betrachten wir außerdem den Ring $\mathsf{P}^+=\mathsf{P}[R^p]$, das Primideal $\mathfrak{p}^+=\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}^+$ und das Ideal $\mathfrak{Q}^+=\mathfrak{p}^+\cdot R$. d bezeichne die Differentiation von R über P.

DEFINITION. *Unter dem Rang eines endlich erzeugbaren R-Moduls M verstehen wir die minimale Anzahl von Erzeugenden von M. Wir schreiben $\mathrm{Rang}_R(M)$ oder auch kurz $\mathrm{Rang}(M)$.*

In [9] wurde unter der Voraussetzung, daß $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, der Rang von $M(R/\mathsf{P})$ bestimmt. Diese Rangaussage läßt sich allgemeiner in die Form einer exakten Folge kleiden, wodurch die Endlichkeitsvoraussetzung für $M(R/\mathsf{P})$ entbehrlich wird. Es gilt

SATZ 1. *Unter den angegebenen Voraussetzungen werden durch die Folge $R\xrightarrow{d}M(R/\mathsf{P})\to M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0$ in natürlicher Weise $\mathfrak{K}$-lineare Abbildungen δ bzw. δ^+ und ε induziert, so daß gilt:*

a) Ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ separabel, so ist die Folge

$$0\to\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2\xrightarrow{\delta}M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0\quad \textit{exakt}\,[1].$$

b) Hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik $p>0$, so ist die Folge

$$0\to\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2\xrightarrow{\delta^+}M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0\quad \textit{exakt.}$$

Alle in den Folgen auftretenden Moduln sind dabei in natürlicher Weise als $\mathfrak{K}$-Moduln aufzufassen.

Der Beweis von Satz 1 verläuft weitgehend analog zum Beweis des Rangsatzes von [9]. Wir können uns daher an einigen Stellen kürzer fassen.

BEWEIS. Da $M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})=M(R/\mathsf{P})/Rd\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\subseteq Rd\mathfrak{P}$ gilt, hat man eine exakte Folge von $\mathfrak{K}$-Moduln und $\mathfrak{K}$-Homomorphismen

$$M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0, \tag{1}$$

wobei $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ der Kern von ε ist. Wir betrachten nun die durch $d\colon R\to M(R/\mathsf{P})$ induzierte Abbildung $\mathfrak{P}\to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$. Wegen $d\mathfrak{P}^2\subseteq\mathfrak{P}d\mathfrak{P}$ kann diese Abbildung als $\mathfrak{K}$-lineare Abbildung von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2$ in $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ aufgefaßt werden. Wir zeigen, daß das Bild bei dieser Abbildung gerade $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ ist. Dies folgt sofort aus der Gleichung $d(\sum r_i p_i)=\sum r_i dp_i+\sum p_i dr_i$, aus der man abliest, daß jedes Element aus $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ Bild eines Elementes von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2$ ist. Außerdem zeigt die Gleichung, daß die

[1]) Die Aussage a) findet sich für den Fall, daß P ein Körper ist, schon bei GODEMENT, Localites simples II, Sem. Cartan-Chevalley **8** (1955/56). Für seinen diesbezüglichen freundlichen Hinweis sei Herrn A. ROSENBERG gedankt.

Abbildung $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2 \to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ $\mathfrak{R}$-linear ist. Wir können daher die exakte Folge (1) verlängern zu einer exakten Folge

$$\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2 \to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0. \tag{2}$$

Wir interessieren uns nun für den Kern der ersten Abbildung. Wegen $Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2) \subseteq \mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ ist sicher $\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2/\mathfrak{P}^2$ im Kern enthalten. Ferner gilt mit $\dot{R} = R/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2$, $\dot{\mathsf{P}} = \mathsf{P}/(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2) \cap \mathsf{P} = \mathsf{P}/\mathfrak{p}$ und $\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2$

$$\begin{aligned} M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}})/\dot{\mathfrak{P}} \cdot M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}}) &\cong \big(M(R/\mathsf{P})/Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\big)/\big(\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})/Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\big) \\ &\cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}). \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß $M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}}) = M(\dot{R}/\mathfrak{k})$ mit $\mathfrak{k} = Q(\dot{\mathsf{P}}) \subseteq \dot{R}$ gilt, so sieht man sofort, daß man (2) ersetzen darf durch die exakte Folge

$$\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\dot{\mathfrak{P}}^2 \xrightarrow{\delta} M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}} \cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0. \tag{3}$$

Es sei nun

a) $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ separabel. $\dot{R}$ ist wegen $\dot{\mathfrak{P}}^2 = 0$ ein vollständiger lokaler Ring im Sinne von [*10*]. Daher gibt es in $\dot{R}$ einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Körper, der $\mathfrak{k}$ umfaßt; wir bezeichnen ihn ebenfalls mit $\mathfrak{R}$. $\dot{\mathfrak{P}}$ hat als $\mathfrak{R}$-Modul eine Basis $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Man überlegt sich sofort, daß $\dot{R}$ isomorph zum Ring

$$\mathfrak{R}[\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]/\mathfrak{n} \tag{4}$$

ist, wo die Y_λ ($\lambda \in \Lambda$) Unbestimmte sind und das Ideal $\mathfrak{n}$ von den Polynomen $Y_{\lambda_1} \cdot Y_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$) erzeugt wird. Hieraus ergibt sich für den Differentialmodul

$$M(\dot{R}/\mathfrak{k}) = \dot{R} \otimes_{\mathfrak{R}} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \dot{R}\, d\, Y_\lambda / \mathfrak{N} \Big),$$

wobei $\mathfrak{N}$ derjenige Untermodul von $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \dot{R}\, d\, Y_\lambda$ ist, der von allen Elementen $p_{\lambda_1} d\, Y_{\lambda_2} + p_{\lambda_2} d\, Y_{\lambda_1}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$) erzeugt wird. Mithin ist $M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}} \cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \cong M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}\, d\, Y_\lambda$. Dies zeigt, daß die Abbildung $\delta\colon \dot{\mathfrak{P}} \to M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}} \cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k})$ ein Monomorphismus ist. Daher ist die Folge

$$0 \to \mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2 \xrightarrow{\delta} M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0$$

exakt.

Es sei nun

b) Char. $\mathfrak{R} = p > 0$. Dann hat auch $\dot{R}$ die Charakteristik p und somit gilt $M(\dot{R}/\mathfrak{k}) = M(\dot{R}/\mathfrak{k}[\dot{R}^p])$. Es sei $\dot{\mathfrak{Q}}^+ = \mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$. Dann ist $\dot{\mathfrak{Q}}^+ = (\dot{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{k}[\dot{R}^p]) \cdot \dot{R}$ und wird folglich von Elementen aus $\mathfrak{k}[\dot{R}^p]$ erzeugt. Es sei $\dot{d}$ die Differentiation von $\dot{R}$ über $\mathfrak{k}[\dot{R}^p]$. Dann folgt $\dot{R}\dot{d}\dot{\mathfrak{Q}}^+ \subseteq \dot{\mathfrak{P}} M(\dot{R}/\mathfrak{k}[\dot{R}^p])$. Wir setzen $\ddot{R} = \dot{R}/\dot{\mathfrak{Q}}^+ = R/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$, $\ddot{\mathfrak{P}} = \dot{\mathfrak{P}}/\dot{\mathfrak{Q}}^+ = \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ und $\ddot{\mathsf{P}}^+ = \mathfrak{k}[\dot{R}^p]/\dot{\mathfrak{Q}}^+ \cap \mathfrak{k}[\dot{R}^p] = \mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]$. Dann gilt

$$M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p])/\ddot{\mathfrak{P}} \cdot M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]) \cong M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}} \cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}).$$

Es ergibt sich, daß $\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2/\mathfrak{P}^2$ im Kern der ersten Abbildung der Folge (2) enthalten ist, woraus folgt, daß auch die Folge

$$\ddot{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\delta^+} M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p])/\ddot{\mathfrak{P}} \cdot M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k}) \to 0 \tag{5}$$

exakt ist.

$\ddot{R}$ enthält wegen $\ddot{R}^p \subseteq \mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]$ einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Körper, der $\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]$ umfaßt. Er werde ebenfalls mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Ist $\{\mathfrak{p}_\lambda\}_{\lambda \in \lambda}$ eine Basis des $\mathfrak{K}$-Moduls $\ddot{\mathfrak{P}}$, so folgt, daß $\ddot{R}$ isomorph zum Ring (4) ist. Wie unter a) schließt man, daß die Folge

$$0 \to \ddot{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\delta^+} M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p])/\ddot{\mathfrak{P}} \cdot M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k}) \to 0$$

exakt ist. Dann ist auch die Folge

$$0 \to \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2 \xrightarrow{\delta^+} M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{K}/k) \to 0$$

exakt q.e.d.

FOLGERUNG 1. *$M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ ist dann und nur dann ein endlich erzeugbarer $\mathfrak{K}$-Modul (oder R-Modul, was auf das gleiche hinausläuft), wenn im Fall* a) *$\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$ und $M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar sind, im Fall* b), *wenn $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ und $M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar sind.*

Ist $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, so folgt i. A. nicht, daß auch $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, wohl aber, daß $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P})$ als R-Moduln endlich erzeugbar sind ($\nu = 1, 2, \ldots$).

FOLGERUNG 2. *Ist $M(R/\mathsf{P})$ als R-Modul endlich erzeugbar, so gilt im Fall* a) *$Rang_R M(R/\mathsf{P}) = Rang_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2) + Rang_{\mathfrak{K}} M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$*, im Fall b) *$Rang_R M(R/\mathsf{P}) = Rang_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2) + Rang_{\mathfrak{K}} M(\mathfrak{K}/k)$.*

§ 2. Separierter Differentialmodul und Komplettierung[2])

Wenn ein Stellenring R im folgenden als topologischer Ring aufgefaßt wird, dann immer hinsichtlich der durch die Potenzen seines maximalen Ideals $\mathfrak{P}$ gegebenen Topologie. Wird ein R-Modul M als topologischer Modul aufgefaßt, dann wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß seine Topologie die durch die Untermoduln $\mathfrak{P}^\nu \cdot M$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) gegebene Topologie ist. R heißt separiert, wenn $\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu = 0$ ist, M heißt separiert, wenn $\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M = 0$ gilt. Die Begriffe „Komplettierung eines Stellenrings" und „kompletter Stellenring" werden mit Hilfe des inversen Limes definiert (vgl. etwa [4]): Für einen beliebigen Stellenring R heißt $\hat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{P}^\nu$ die Komplettierung von R; R heißt komplett, wenn der natürliche Homomorphismus von R in $\hat{R}$ ein Isomorphismus von R auf $\hat{R}$ ist. Für einen beliebigen R-Modul M heißt $\hat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{P}^\nu \cdot M$ die Komplettierung von M; M heißt komplett, wenn der natürliche Homomorphismus

[2]) *Anmerkung bei der Korrektur.* Die Theorie der separierten Differentialmoduln wurde ausführlicher als es hier geschehen wird in der kürzlich erschienenen Arbeit von Y. NAKAI und S. SUZUKI: On m-adic differentials, J. Sci. Hiroshima **24**, 459—476 (1960) entwickelt. Die folgenden Sätze überschneiden sich teilweise mit Sätzen dieser Arbeit.

von M in $\hat{M}$ ein Isomorphismus auf $\hat{M}$ ist. Einige Grundtatsachen über die Komplettierung von Stellenringen werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Definition. *Ein separierter R-Modul M' heißt separierter Differentialmodul von R über P, wenn es eine Derivation $d'\colon R \to M'$ von R über P in M' gibt, so daß gilt: 1. M' wird von den Elementen $d'r$ mit $r \in R$ erzeugt. 2. Jede Derivation $D\colon R \to N$ von R über P in einen separierten R-Modul N ist eine Spezialisierung von d', d.h. es gibt eine R-lineare Abbildung $h'\colon M' \to N$ mit $D = h' \circ d'$* [3]).

Es ist klar, daß ein separierter Differentialmodul M', wenn ein solcher existiert, bis auf stetige R-Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Wir sprechen daher von *dem* separierten Differentialmodul und bezeichnen ihn mit $M'(R/\mathsf{P})$. Es ist leicht zu zeigen, daß $M'(R/\mathsf{P})$ immer existiert, denn der Modul $M(R/\mathsf{P})/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P})$ besitzt die in der Definition vorkommenden Eigenschaften 1. und 2., wenn für d' die durch die Differentiation $d\colon R \to M(R/\mathsf{P})$ induzierte Abbildung genommen wird. Daß 1. gilt, ist unmittelbar klar. Auf Grund der universellen Eigenschaft von $M(R/\mathsf{P})$ gibt es eine R-lineare Abbildung $h\colon M \to N$ mit $D = h \circ d$. Wegen $h(\mathfrak{P}^\nu \cdot M) \subseteq \mathfrak{P}^\nu \cdot N$ ist $h\left(\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu M\right) \subseteq \bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot N = 0$. h induziert daher eine R-lineare Abbildung $h'\colon M/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M \to N$ und es gilt $D = h' \circ d'$.

Anmerkung. *Ist R separiert, so ist die Derivation d' mit der Limesbildung vertauschbar.*

Gilt nämlich $r - r_\nu \in \mathfrak{P}^\nu$ für ein Element $r \in R$ und eine Folge $\{r_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von Elementen aus R, so ergibt sich $d'r - d'r_\nu \in \mathfrak{P}^{\nu-1} d' \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^{\nu-1} \cdot M'(R/\mathsf{P})$. Folglich ist $d'\left(\lim_{\nu\to\infty} r_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty} d'r_\nu$.

In vielen Fällen spielt der separierte Differentialmodul $M'(R/\mathsf{P})$ eine wichtigere Rolle als der Differentialmodul $M(R/\mathsf{P})$ selbst. Es ist daher von Bedeutung, daß Satz 1 auch für den separierten Differentialmodul gilt:

Satz 2. *Die Aussagen von Satz 1 und seinen Folgerungen 1 und 2 bleiben richtig, wenn $M(R/\mathsf{P})$ und d durch $M'(R/\mathsf{P})$ bzw. d' ersetzt werden.*

Dies folgt sofort aus

$$M'(R/\mathsf{P}) = M(R/\mathsf{P})/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P}) \quad \text{und} \quad \bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P}) \subseteq \mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \subseteq R d \mathfrak{P}.$$

Ist R komplett (und daher auch separiert), so ist $M'(R/\mathsf{P})$ schon endlich erzeugbar, wenn $M'(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M'(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, im Gegensatz zum Differentialmodul $M(R/\mathsf{P})$:

Satz 3. *Ist R komplett, so gilt: $M'(R/\mathsf{P})$ ist dann und nur dann endlich erzeugbar, wenn $M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})$ und im Fall* a) $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$, *im Fall* b) $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ *endlich erzeugbar sind.*

---

[3]) Dabei bedeutet die Verknüpfung $h' \circ d'$ zweier Abbildungen hier wie auch im folgenden das Produkt der Abbildungen im Sinne der Hintereinanderausführung:

$$h' \circ d'(x) = h'(d'(x)).$$

BEWEIS. Daß die Bedingungen notwendig sind, ergibt sich aus Satz 2. Sind sie erfüllt, so ist nach Satz 2 jedenfalls $M'(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M'(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar. Daß $M'(R/\mathsf{P})$ dann selbst endlich erzeugbar ist, ergibt sich aus

HILFSSATZ 1. *M sei ein separierter Modul über einem kompletten Stellenring R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$. Ist $M/\mathfrak{P}\cdot M$ endlich erzeugbar, dann ist M selbst endlich erzeugbar und komplett.*

BEWEIS. Da $M/\mathfrak{P}\cdot M$ endlich erzeugbar ist, folgt $M=E+\mathfrak{P}\cdot M$ mit einem endlich erzeugbaren Untermodul E von M, daraus $M=E+\mathfrak{P}\cdot E+\mathfrak{P}^2\cdot E+\cdots+\mathfrak{P}^\nu\cdot E+\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$ für $\nu=0,1,\ldots$ Ist $E=R\,\omega_1+\cdots+R\,\omega_n$, so besitzt jedes $m\in M$ eine Darstellung $m=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\nu}p_{ik}\right)\omega_k+m_{\nu+1}$ mit $p_{ik}\in\mathfrak{P}^i$ $(k=1,\ldots,n;\ \mathfrak{P}^0=R)$ und $m_{\nu+1}\in\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$. Ist $r_k=\sum_{i=0}^{\infty}p_{ik}$, so folgt sofort $m=\sum_{k=1}^{n}r_k\,\omega_k\in E$. Mithin ist $M=E$ endlich erzeugbar und folglich auch komplett.

SATZ 4. *R sei ein separierter Stellenring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{P}$ endlich erzeugbar ist. $\hat{R}$ sei die Komplettierung von R und $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar. Dann gilt:* $M'(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})$.

BEWEIS. Da R separiert ist, ist der natürliche Homomorphismus $R\to\hat{R}$ ein Monomorphismus; daher kann R und folglich auch P als Unterring von $\hat{R}$ aufgefaßt werden. Somit ist $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ definiert. Es sei $\hat{\mathfrak{P}}$ das maximale Ideal von $\hat{R}$. Da $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist und $\hat{R}$ komplett, ist auch $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ komplett: $M'(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M'(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M'(\hat{R}/\mathsf{P})$. Wegen $M'(\hat{R}/\mathsf{P})=M(\hat{R}/\mathsf{P})/\bigcap_\nu\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})$ ist $M'(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M'(\hat{R}/\mathsf{P})=M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})$. Es sei $\hat{d}\colon\hat{R}\to M(\hat{R}/\mathsf{P})$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P. Dann gilt

$$(1)\qquad \hat{\mathfrak{P}}^{\nu+1}\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\subseteq\hat{R}\,\hat{d}\,\hat{\mathfrak{P}}^{\nu+1}\subseteq\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\qquad(\nu=1,2,\ldots)$$

und folglich $\varprojlim M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{R}\,\hat{d}\,\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cong\varprojlim M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu/\mathsf{P}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cap\mathsf{P})$. Da $\mathfrak{P}$ endlich erzeugbar vorausgesetzt ist, gilt $\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cong R/\mathfrak{P}^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$. Es folgt $M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu/\mathsf{P}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cap\mathsf{P})=M(R/\mathfrak{P}^\nu/\mathsf{P}/\mathfrak{P}^\nu\cap\mathsf{P})=M(R/\mathsf{P})/R\,d\mathfrak{P}^\nu$, wenn alle Moduln in natürlicher Weise als $R/\mathfrak{P}^\nu$-Moduln aufgefaßt werden. Da (1) auch mit $\hat{R}$ und $\hat{d}$ an Stelle von $\hat{R}$ und $\hat{d}$ richtig ist, folgt $\varprojlim M(R/\mathsf{P})/R\,d\mathfrak{P}^\nu=\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 3. Einbettung des Differentialmoduls in einen Modul über der Komplettierung

Der folgende Satz bildet die Grundlage für die in der Einleitung behauptete direkte Summenzerlegung des Moduls $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$. Wir benötigen ihn nur für diskrete Bewertungsringe R, beweisen ihn jedoch gleich allgemeiner für separierte Stellenringe mit endlich erzeugtem maximalem Ideal.

Satz 5. *R sei ein separierter Stellenring mit endlich erzeugbarem maximalem Ideal $\mathfrak{P}$, $\hat{R}$ seine Komplettierung, $\hat{\mathfrak{P}}=\mathfrak{P}\cdot\hat{R}$ ihr maximales Ideal. $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ sei endlich erzeugbar. Dann gilt mit $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$ und $D=\bigcap_\nu \hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$:*

$$M'(\hat{R}/\mathsf{P})=\overline{M}/D.$$

Beweis. Es gilt im Sinne kanonischer Isomorphie:

$$\begin{aligned}\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}&=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\left(\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})\right)\\&=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})/\left(\hat{R}\otimes\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})+\hat{\mathfrak{P}}^\nu\otimes M(R/\mathsf{P})\right)\\&\cong(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu)\otimes_R\left(M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})\right)\cong(R/\mathfrak{P}^\nu)\otimes_R\left(M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})\right)\\&\cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P}).\end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ und $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ ergibt sich aus Folgerung 1 von Satz 1, daß $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist. Wird $M_1=\overline{M}/D$ gesetzt, so ist $M_1/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M_1=\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$ wegen $D\subseteq\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$. Nach Hilfssatz 1 folgt, daß M_1 endlich erzeugbar und komplett ist:

$$M_1=\varprojlim M_1/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M_1=\varprojlim\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}=\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P}).$$

Da andererseits $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ nach Satz 3 endlich erzeugbar ist, folgt nach Satz 4, daß der letzte inverse Limes mit $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ übereinstimmt.

Folgerung 1. *Es gilt $\overline{M}=E+D$ mit einem endlich erzeugbaren $\hat{R}$-Modul E, der denselben Rang wie $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ hat.*

Folgerung 2. *Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, so gilt*

$$M'(\hat{R}/\mathsf{P})=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})=\overline{M}.$$

Beweis. Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, dann ist auch $\overline{M}$ endlich erzeugbar. Weil $\hat{R}$ komplett ist, folgt $D=0$ (s. [4], Chap. 0, Cor. 7.2.6.).

Für den Rest der Arbeit machen wir nun die folgenden

Voraussetzungen. *Es sei R ein diskreter Bewertungsring (vom Rang 1) mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$, dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ und dem Quotientenkörper K. P sei ein beliebiger unitärer Unterring von R mit dem Quotientenkörper k, und $\mathfrak{k}=Q(\mathsf{P}/\mathfrak{P}\cap\mathsf{P})$ sei der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}$. $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ wird endlich erzeugbar vorausgesetzt, d.h. hat $\mathfrak{k}$ die Charakteristik 0, so hat $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ endlichen Transzendenzgrad, hat $\mathfrak{k}$ die Charakteristik $p\neq 0$, so hat $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ endlichen p-Grad. $\hat{R}$ sei die Komplettierung von R, $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$. $\hat{K}$ sei der Quotientenkörper von $\hat{R}$.*

Satz 5 kann nun verschärft werden zu

Satz 6. *Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt:*

1. $\overline{M}=E\oplus D$, wo E ein endlich erzeugbarer, zu $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ isomorpher $\hat{R}$-Modul ist und $D=\bigcap_\nu\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$ der größte in $\overline{M}$ enthaltene Divisionsmodul ist, d.h. der größte Untermodul von $\overline{M}$ mit $D=\hat{\mathfrak{P}}\cdot D$.

2. Der Rang von E wird durch Satz 2 gegeben. E besitzt eine Zerlegung $E=F\oplus T$ in einen endlich erzeugbaren freien $\widehat{R}$-Modul F und einen endlich erzeugbaren Torsionsmodul T.

3. D ist isomorph zu einer direkten Summe von Divisionsmoduln D_λ, D_μ der folgenden beiden Typen: $D_\lambda\cong\widehat{K}$ für $\lambda\in\Lambda$ (torsionsfreie Divisionsmoduln), $D_\mu\cong\widehat{K}/\widehat{R}$ für $\mu\in\mathsf{M}$ (Torsionsdivisionsmoduln): $D=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda\oplus\bigoplus_{\mu\in\mathsf{M}} D_\mu$.

ANMERKUNGEN. 1. Für die modultheoretischen Begriffe Divisionsmodul, Torsionsmodul usw. vgl. man KAPLANSKY [8].

2. Durch Satz 6 wird die Untersuchung der Struktur von $\overline{M}$ zurückgeführt auf die Untersuchung der Struktur von F, T und D. Im folgenden wird der Rang von F bestimmt; dann ist auch der Rang von T bekannt als Differenz der Ränge von E und F.

3. Genau dann, wenn $M(K/k)$ endlich erzeugbar ist, ist auch die Anzahl der D_λ (die isomorph zu $\widehat{K}$ sind) endlich und es gilt: Anzahl der $D_\lambda=\mathrm{Rang}_K M(K/k)-\mathrm{Rang}_{\hat{R}} F$.

BEWEIS. Es gilt einerseits nach Satz 6: $\widehat{K}\otimes_{\hat{R}}\widehat{R}\otimes_R M\cong\widehat{K}\otimes_{\hat{R}} F\oplus\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\widehat{K}\otimes_{\hat{R}} D_\lambda$, andererseits $\widehat{K}\otimes_{\hat{R}}\widehat{R}\otimes_R M\cong\widehat{K}\otimes_R M\cong\widehat{K}\otimes_K K\otimes_R M\cong\widehat{K}\otimes_K M(K/k)$ und $\mathrm{Rang}_{\hat{K}}\widehat{K}\otimes_K M(K/k)=\mathrm{Rang}_K M(K/k)$. Daraus liest man die Behauptung sofort ab.

BEWEIS von Satz 6. Nach der Folgerung 1 von Satz 5 gilt $\overline{M}=\widetilde{E}+D$ mit einem endlich erzeugbaren R-Modul $\widetilde{E}$. Wir zeigen anschließend in einem Hilfssatz, daß daraus folgt, daß D der größte Divisionsuntermodul von $\overline{M}$ ist und daß deshalb $\overline{M}=E\oplus D$ mit einem endlich erzeugbaren $\widehat{R}$-Modul E gilt. Nach Satz 5 ist $\overline{M}/D=M'(\widehat{R}/\mathsf{P})$, daher E isomorph zu $M'(\widehat{R}/\mathsf{P})$. Die direkte Summenzerlegung von E ergibt sich unmittelbar aus der Elementarteilertheorie. Die direkte Summenzerlegung von D folgt aus dem Analogon zu [8], Theorem 4 für Moduln über diskreten Bewertungsringen (vgl. [8], §12 und Cor. 2 zu Theorem 23).

DEFINITION. *Ein Element m eines R-Moduls M hat die Höhe $h(m)=\nu$ in M, wenn $m\in\mathfrak{P}^\nu\cdot M$, $m\notin\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$. Es hat unendliche Höhe, wenn $m\in\bigcap_\nu\mathfrak{P}^\nu\cdot M$* (vgl. [8], §9).

HILFSSATZ 2. *Ist M ein R-Modul mit $M=\widetilde{E}+U$, wo $\widetilde{E}$ endlich erzeugbar ist und alle Elemente von U unendliche Höhe haben, dann gilt $M=E\oplus D$ mit einem endlich erzeugbaren R-Modul E und einem Divisionsmodul D.*

BEWEIS durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Erzeugenden von $\widetilde{E}$.

1. Für $n=0$ ist $M=U$. Jedes Element von M hat dann unendliche Höhe in M. Folglich ist $M=D$ ein Divisionsmodul.

2. Der Hilfssatz sei nun für alle Moduln bewiesen, bei denen sich $\widetilde{E}$ von $n-1$ Elementen erzeugen läßt. Es sei $M=\langle y_1,\ldots,y_n\rangle+U$. D sei der größte Divisionsmodul, der in M enthalten ist; seine Existenz ergibt sich

aus [8], Theorem 3. Es sei $\dot{M} = M/D = \langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n \rangle + \dot{U}$. Da $\dot{U}$ homomorphes Bild von U ist, haben die Elemente von $\dot{U}$ unendliche Höhe in $\dot{M}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $\dot{M}$ sei torsionsfrei. Ist $\dot{W}$ die Menge aller Elemente von $\dot{M}$, die unendliche Höhe in $\dot{M}$ haben, so ist $\dot{U} \subseteq \dot{W}$. Wir zeigen, daß $\dot{W}$ ein Divisionsmodul ist.

Es sei Π ein Primelement von R. Ist $\dot{x} \in \dot{W}$ und Π^r vorgegeben, so gibt es ein $\dot{z} \in \dot{M}$ mit $\dot{x} = \Pi^r \cdot \dot{z}$. Zu beliebigem natürlichen s existiert ferner ein $\dot{v} \in \dot{M}$ mit $\dot{x} = \Pi^{r+s} \cdot \dot{v}$. Es folgt $\Pi^r (\dot{z} - \Pi^s \cdot \dot{v}) = 0$ und hieraus, weil $\dot{M}$ torsionsfrei ist, $\dot{z} = \Pi^s \cdot \dot{v}$. Da s beliebig war, hat mithin auch $\dot{z}$ unendliche Höhe in $\dot{M}$ und liegt daher in $\dot{W}$.

Da D der größte Divisionsmodul von M war, enthält $\dot{M}$ keinen Divisionsmodul, der von 0 verschieden ist (vgl. [8], Theorem 3). Daher ist $\dot{W} = 0$, folglich $\dot{U} = 0$ und $U \subseteq D$. Nach [8], Theorem 2 ist D ein direkter Summand von M: $M = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle + D = E \oplus D$. Es folgt $E \cong M/D = \langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n \rangle$. Folglich ist E endlich erzeugbar, q.e.d.

b) $\dot{M}$ sei *nicht* torsionsfrei. Da $\dot{M}$ reduziert ist, d.h. keinen Divisionsmodul $\neq 0$ enthält, besitzt $\dot{M}$ nach [8], Theorem 9 einen direkten zyklischen Summanden: $\dot{M} = \langle \dot{x} \rangle \oplus \ddot{M}$. Man sieht sofort, daß $\dot{x}$ die Höhe 0 in $\dot{M}$ hat. Es sei $\dot{x} = \alpha_1 \dot{y}_1 + \cdots + \alpha_n \dot{y}_n + \dot{u}$ mit $\alpha_i \in R$, $\dot{u} \in \dot{U}$. Es können nicht alle α_i durch Π teilbar sein, denn sonst hätte $\dot{x}$ mindestens die Höhe 1 in $\dot{M}$, da $\dot{u}$ als Element unendlicher Höhe in $\Pi \cdot \dot{M}$ enthalten ist. Eines der Elemente, etwa α_n, ist also Einheit in R. Es folgt $\dot{y}_n \in \langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{n-1}, \dot{x} \rangle + \dot{U}$, daraus $\dot{M} = \langle \dot{x} \rangle + \langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{n-1} \rangle + \dot{U}$. Dann ist $\ddot{M} \cong \dot{M}/\langle \dot{x} \rangle = \langle \ddot{y}_1, \ldots, \ddot{y}_{n-1} \rangle + \ddot{U}$ und $\ddot{U}$ besteht als homomorphes Bild von $\dot{U}$ aus Elementen unendlicher Höhe in $\ddot{M}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\ddot{M} = \ddot{E} \oplus \ddot{D}$, wo $\ddot{E}$ endlich erzeugbar ist und $\ddot{D}$ ein Divisionsmodul. Es ergibt sich weiter $\dot{M} \cong \langle \dot{x} \rangle \oplus \ddot{E} \oplus \ddot{D}$. Weil $\dot{M}$ reduziert ist, folgt $\ddot{D} = 0$. Mithin ist $\dot{M}$ endlich erzeugbar. D ist als Divisionsmodul direkter Summand von M: $M = E \oplus D$. $E \cong M/D = \dot{M}$ ist endlich erzeugbar. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Folgerung. *Es sei $M = \widetilde{E} + U$, $\widetilde{E}$ endlich erzeugbar, $U = \bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M$. Dann folgt: U stimmt mit dem größten Divisionsmodul D von M überein.*

Beweis. U ist der Untermodul, der von allen Elementen unendlicher Höhe in M gebildet wird. Daher ist D in U enthalten. Nach Hilfssatz 2 ist $M = E \oplus D$, wo E endlich erzeugbar ist. Für ein Element der Form $x + d$, mit $x \in E$, $d \in D$, gilt $h(x+d) = h(x) < \infty$. Es folgt $U \subseteq D$ und damit $U = D$.

Mit Hilfssatz 2 und seiner Folgerung ist nun auch Satz 6 vollständig bewiesen.

Wir zeigen nun noch

Satz 7. *Die kanonische Einbettung $M(R/\mathsf{P}) \to \overline{M} = \hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$ ist ein Monomorphismus.*

Es gilt nämlich allgemeiner

HILFSSATZ 3. *Es sei R ein nullteilerfreier Elementarteilerring (Def. in [7]), K sein Quotientenkörper. S sei ein Oberring von R, so daß kein Element von R Nullteiler von S ist, und es gelte $S \cap K = R$ (im Quotientenring von S mit den von 0 verschiedenen Elementen von R als Nennermenge). M sei ein R-Modul. Dann ist die kanonische Einbettung von M in $S \otimes_R M$ ein Monomorphismus.*

BEWEIS. Wir denken uns M in der Form $M = N/Q$ dargestellt, wo N einen freien R-Modul mit einer Basis $\{y_\lambda\}$ und Q einen Untermodul von N bezeichnet. Dann ist $S \otimes_R N = N'/Q'$, wo N' den von den y_λ erzeugten freien S-Modul und Q' den von den Elementen von Q in N' erzeugten S-Untermodul von N' bedeutet. Der Kern der kanonischen R-linearen Abbildung von $M = N/Q$ in N'/Q' ist $Q' \cap N/Q$. Wir haben also $Q' \cap N \subseteq Q$ zu zeigen.

Es sei $x = s_1 q_1 + \cdots + s_m q_m$ ($s_i \in S$, $q_i \in Q$) ein Element von $Q' \cap N$. N_1 sei der endlich erzeugte, freie Teilmodul von N, der von den endlich vielen y_λ aufgespannt wird, die man zur Darstellung von x und den q_i mit Koeffizienten aus R benötigt. Ferner sei Q_1 der von den q_i erzeugte R-Modul. Mit N_1' bzw. Q_1' bezeichnen wir die von N_1 bzw. Q_1 erzeugten S-Untermoduln von N'. Dann gilt $x \in Q_1' \cap N_1$. N_1 ist ein endlich erzeugter freier R-Modul, Q_1 ein endlich erzeugter Untermodul, R ein Elementarteilerring. Daher gibt es Basisdarstellungen von N_1 und Q_1 von folgender Form:

$$N_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R \cdot Z_i, \qquad Q_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R r_i \cdot Z_i \quad \text{mit} \quad r_i \in R \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es folgt

$$N_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S \cdot Z_i, \qquad Q_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S r_i \cdot Z_i.$$

Als Element von $Q_1' \cap N_1$ besitzt dann x einerseits eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i$ mit $a_i \in R$, andererseits eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} b_i r_i Z_i$ mit $b_i \in S$. Durch Koeffizientenvergleich folgt $b_i r_i = a_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Im Quotientenring von S mit den von 0 verschiedenen Elementen von R als Nennermenge erfüllt auch $\frac{a_i}{r_i}$ die Gleichung $\frac{a_i}{r_i} \cdot r_i = a_i$ (wenn $r_i \neq 0$ ist), folglich ist $\left(b_i - \frac{a_i}{r_i}\right) r_i = 0$. Da r_i nicht Nullteiler in S ist, folgt $b_i = \frac{a_i}{r_i} \in K \cap S = R$. Mithin ist $x \in Q_1 \subseteq Q$.

§ 4. Bestimmung des Ranges von F

Die Bestimmung des Ranges von F wird für diskrete Bewertungsringe der Charakteristik 0 und für diskrete Bewertungsringe der Charakteristik $p \neq 0$ getrennt vorgenommen. Wir betrachten zunächst

I. Diskrete Bewertungsringe von Primzahlcharakteristik

Es sei also R von der Charakteristik $p \neq 0$. Wir bezeichnen mit $K^+ = k(K^p)$ das Körperkompositum von k und K^p, mit R^+ den diskreten Bewertungsring $R^+ = R \cap K^+$, sein maximales Ideal mit $\mathfrak{P}^+$, seinen Restklassenkörper mit $\mathfrak{R}^+$. $\hat{R}$ und $\hat{R}^+$ seien die Komplettierungen von R und R^+, und $\hat{\mathsf{P}}^+$ sei die abgeschlossene Hülle von $\mathsf{P}^+ = \mathsf{P}[R^p]$ in $\hat{R}$. Wir zeigen

Satz 8. *Es ist* $M'(\hat{R}/\mathsf{P}) = M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+) \cong M(\hat{R}/\hat{R}^+) \oplus \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$. $M(\hat{R}/\hat{R}^+)$ *ist ein freier* $\hat{R}$*-Modul, der isomorph zu* F *ist, und* $\hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ *ist ein Torsionsmodul, der isomorph zu* T *ist. Es gilt:*

$$Rang_{\hat{R}} F = p\text{-}Grad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^+} + Rang_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R,$$

$$Rang_{\hat{R}} T = p\text{-}Grad \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)} + Rang_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathsf{P}^+) \cdot R^+.$$

Anmerkung. $\mathrm{Rang}_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R$ ist 0 oder 1, je nachdem R^+ ein Primelement von R enthält oder nicht. Entsprechend ist $\mathrm{Rang}_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathsf{P}^+) \cdot R^+$ gleich 0 oder 1, je nachdem P^+ ein Primelement von R^+ enthält oder nicht.

Beweis von Satz 8. Zunächst ist klar, daß $M'(\hat{R}/\mathsf{P}) = M'(\hat{R}/\mathsf{P}[R^p])$ gilt. Die Elemente von $\hat{\mathsf{P}}^+$ sind Grenzwerte von Elementen aus $\mathsf{P}^+ = \mathsf{P}[R^p]$. Wegen der Vertauschbarkeit der Derivation $d' : \hat{R} \to M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ mit der Limesbildung folgt $M'(\hat{R}/\mathsf{P}) = M'(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$. Wir zeigen, daß $\hat{R}$ ein endlich erzeugbarer Oberring von $\hat{\mathsf{P}}^+$ ist. Dann folgt, daß $M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$ endlich erzeugbar ist, folglich $\bigcap_\nu \hat{\mathfrak{P}}^\nu \cdot M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+) = 0$ und daher $M'(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+) = M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$.

Der Restklassenkörper von $\hat{\mathsf{P}}^+$ stimmt mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)$ von P^+ überein; $\hat{R}$ hat den Restklassenkörper $\mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)\,[\xi_1, \ldots, \xi_t]$. Wir wählen für die Elemente von $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)$ Vertreter in $\hat{\mathsf{P}}^+$, für die Elemente $\zeta_1, \ldots, \xi_t$ Vertreter $x_1, \ldots, x_t$ in $\hat{R}$. Π sei ein Primelement von $\hat{R}$. Dann kann jedes Element von $\hat{R}$ in eine Potenzreihe nach Π entwickelt werden, deren Koeffizienten Polynome in $x_1, \ldots, x_t$ mit Koeffizienten aus dem Vertretersystem von $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)$ in $\hat{\mathsf{P}}^+$ sind. Wegen $\hat{R}^p \subseteq \hat{\mathsf{P}}^+$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\hat{\mathsf{P}}^+$ in $\hat{R}$ folgt sofort $\hat{R} = \hat{\mathsf{P}}^+[x_1, \ldots, x_t, \Pi]$. Damit ist $M'(\hat{R}/\mathsf{P}) = M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$ bewiesen.

Wir bezeichnen mit S den Bewertungsring $\hat{R} \cap Q(\hat{\mathsf{P}}^+)$ des Quotientenkörpers $Q(\hat{\mathsf{P}}^+)$ von $\hat{\mathsf{P}}^+$. Es gilt $\hat{\mathsf{P}}^+ \subseteq S$ und $R^+ \subseteq S \subseteq \hat{R}^+$. Daher haben S und $\hat{R}^+$ denselben Restklassenkörper $\mathfrak{R}^+$ und S enthält ein Primelement von $\hat{R}^+$. Da $\hat{R}$ ein endlich erzeugbarer Oberring von $\hat{\mathsf{P}}^+$ ist und wegen $\hat{R}^p \subseteq \hat{\mathsf{P}}^+$ sogar ein endlich erzeugbarer $\hat{\mathsf{P}}^+$-Modul, ist $\hat{R}$ erst recht ein endlich erzeugbarer S-Modul. Es folgt, daß für die Erweiterung $\hat{R}$ über S die Gradrelation $[\hat{K} : Q(S)] = [\mathfrak{R} : \mathfrak{R}^+] \cdot e_S$ gilt, wo e_S den Verzweigungsexponenten von $\hat{R}$ über S bedeutet (vgl. [12], S. 60). Dann gilt die Gradrelation auch für alle diskreten Bewertungsringe zwischen $\hat{R}$ und S. Es folgt $S = \hat{R}^+$.

Es sei nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^+[\eta_1, \ldots, \eta_s]$ mit einer p-Basis $\eta_1, \ldots, \eta_s$ von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{R}^+$. Dann ist $\hat{R} = \hat{R}^+[y_1, \ldots, y_s, \Pi]$, wo $y_1, \ldots, y_s$ Vertreter für $\eta_1, \ldots, \eta_s$ in $\hat{R}$ sind. Ist $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$ verzweigt, dann bilden $y_1, \ldots, y_s, \Pi$ wegen der Gültigkeit der Gradrelation eine p-Basis von $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$, ist $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$ unverzweigt, dann darf $\Pi \in \hat{R}^+$ angenommen werden; dann bilden $y_1, \ldots, y_s$ eine p-Basis

von $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$. Somit ist $\hat{R} \cong \hat{R}^+[Z_1, \ldots, Z_\sigma]/\mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n} = (Z_1^p - z_1^p, \ldots, Z_\sigma^p - z_\sigma^p$ und $\sigma = p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^+} + \mathrm{Rang}_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R$ ist. Die Differentiation $\hat{d}^+ \colon \hat{R}^+ \to M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+$ von $\hat{R}^+$ über $\hat{\mathsf{P}}^+$ kann fortgesetzt werden zur Differentiation $\hat{d} \colon \hat{R} \to M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+$ von $\hat{R}$ über $\hat{\mathsf{P}}^+$, da $\hat{d}^+ z_i^p = 0$ ist, wegen $z_i^p \in \hat{\mathsf{P}}^+$ $(i = 1, \ldots, \sigma)$. Es folgt

$$M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+) = \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+) \oplus \overset{\sigma}{\underset{i=1}{\oplus}} \hat{R}\, \hat{d} z_i \cong \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+) \oplus M(\hat{R}/\hat{R}^+).$$

$M(\hat{R}/\hat{R}^+)$ ist ein freier $\hat{R}$-Modul vom Rang σ. $M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ ist ein Torsionsmodul, da $\hat{R}^+$ und $\hat{\mathsf{P}}^+$ denselben Quotientenkörper besitzen, daher ist auch $\hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+$ ein Torsionsmodul. Es folgt $F \cong M(\hat{R}/\hat{R}^+)$, $T \cong \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ und die Rangaussage für F. Der Rang von $M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ ergibt sich aus Satz 1, Folgerung 2 zu

$$\begin{aligned} &p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)} + \mathrm{Rang}_{\hat{R}^+} \hat{\mathfrak{P}}^+/(\hat{\mathfrak{P}}^+ \cap \hat{\mathsf{P}}^+) \cdot \hat{R}^+ \\ &\quad = p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)} + \mathrm{Rang}_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathsf{P}^+) \cdot R^+, \end{aligned}$$

wobei $\hat{\mathfrak{P}}^+$ das Primideal von $\hat{R}^+$ ist. T hat denselben Rang, wie sich auch durch Differenzbildung der Ränge von $M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$ und F ergibt. Damit sind alle Aussagen von Satz 8 bewiesen.

Wir gehen hier nicht auf die Frage nach der Anzahl der $D_\mu = \hat{K}/\hat{R}$ ein, die in der direkten Summenzerlegung von M in Satz 6 auftreten. Im Fall von diskreten Bewertungsringen der Charakteristik 0 wird für eine weite Klasse von Grundringen P gezeigt, daß keine solche Moduln auftreten. Daß sie im allgemeinen jedoch vorkommen können, zeigt das folgende

BEISPIEL. Von F. K. SCHMIDT wurde in einem Beispiel gezeigt (vgl. [11]), daß es diskrete Bewertungsringe R und P der Charakteristik $p \neq 0$ gibt, die folgende Eigenschaften haben: P ist in R enthalten, R ist über P unverzweigt und R und P haben den gleichen Restklassenkörper; der Quotientenkörper K von R ist über dem Quotientenkörper k von P rein inseparabel vom Grad p.

Sind P und R zwei solche diskrete Bewertungsringe, so folgt $M(R/\mathsf{P})$, $\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) = 0$ nach Satz 1, Folgerung 1. Daher ist $M(R/\mathsf{P}) = \mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ ein Divisionsmodul. Es ist $M(R/\mathsf{P}) \neq 0$, denn $M(K/k) = K \otimes_R M(R/\mathsf{P})$ ist von 0 verschieden, da K/k rein inseparabel vom Grad p ist. Es sei $K = k(y)$ mit $y \in R$. Dann gilt $M(R/\mathsf{P}[y]) = M(R/\mathsf{P})/R\,dy \neq 0$, denn sonst wäre $M(R/\mathsf{P}) = R dy$ endlich erzeugt, was nicht der Fall sein kann, da $M(R/\mathsf{P})$ ein Divisionsmodul ist. Wegen $K \otimes_R M(R/\mathsf{P}[y]) = M\big(K/k(y)\big) = 0$ ist $M(R/\mathsf{P}[y])$ ein nicht verschwindender Torsionsdivisionsmodul.

II. Diskrete Bewertungsringe der Charakteristik Null

Es gelten weiter die Voraussetzungen, die in §3 angegeben wurden. *Zusätzlich setzen wir voraus, daß R die Charakteristik Null besitzt.* Dieser Fall erfordert wesentlich andere Methoden als der Fall der Primzahlcharakteristik. Wir beweisen daher zunächst in zwei vorbereitenden Abschnitten einige Fortsetzungssätze für Derivationen.

1. Ausdehnung einer Derivation eines diskreten Bewertungsrings der Charakteristik Null auf seine Komplettierung

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Satz.

Satz 9. *Es sei D eine Derivation von R, $\hat{D}$ die universelle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$. Dann gilt:*

a) *$\hat{D}$ ist tensorielle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$* (s. [2], Def. 5).

b) *$\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}R$ ist ein torsionsfreier Divisionsmodul.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einige teils modultheoretische, teils die Struktur der Ringerweiterung betreffende Hilfsbetrachtungen, die wir in sechs Hilfssätzen voranstellen.

Hilfssatz 4. *Es sei S ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, daß jeder endlich erzeugbare, torsionsfreie S-Modul frei ist. Ferner sei T ein Oberring von S mit der Eigenschaft, daß kein Element von S Nullteiler in T ist, M ein S-Modul, N ein Untermodul. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $T\otimes_S N \to T\otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

Weil T nach Voraussetzung ein torsionsfreier S-Modul ist, ist Hilfssatz 4 eine unmittelbare Folge von:

Hilfssatz 5. *Es sei S ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, daß jeder endlich erzeugbare, torsionsfreie S-Modul frei ist, L ein torsionsfreier S-Modul, $N \subseteqq M$ zwei beliebige S-Moduln. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $L\otimes_S N \to L\otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

Beweis. 1. Fall: L ist endlich erzeugbar. Nach Voraussetzung über S ist L als torsionsfreier Modul dann frei und die Behauptung des Satzes ist trivial.

2. Fall: L ist nicht endlich erzeugbar. Es ist zu zeigen: Gilt für Elemente $l_i \in L$ und $n_i \in N$ $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ in $L\otimes_S M$, so gilt diese Relation schon in $L\otimes_S N$. Es sei also $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ in $L\otimes_S M$. Dann gibt es nach [3], §1, Prop. 8 einen endlich erzeugbaren Untermodul $L' \subseteqq L$ mit $l_i \in L'$ und $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ bereits in $L'\otimes_S M$. Da L' endlich erzeugbar ist, gilt nach Fall 1 $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ schon in $L'\otimes_S N$, also erst recht in $L\otimes_S N$.

Anmerkung. *Hilfssatz 4 garantiert die Transitivität der tensoriellen Ausdehnung von Derivationen bei diskreten Bewertungsringen* (s. [2], §1).

Wir werden im folgenden von dieser Transitivität Gebrauch machen, auch wenn es nicht ausdrücklich erwähnt wird.

Hilfssatz 6. *Es sei S ein kommutativer unitärer Ring, A eine multiplikativ abgeschlossene Menge von Elementen von S, $1 \in A$, $0 \notin A$, S_A der Quotientenring von S bezüglich A, M ein S-Modul, N ein Untermodul. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $S_A \otimes_S N \to S_A \otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

BEWEIS. Weil S_A Quotientenring von S ist, läßt sich jedes Element $y \in S_A \otimes N$ in der Form schreiben $y = \frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x)$, $a \in A$, $x \in N$. Liegt nun y im Kern des kanonischen Homomorphismus $S_A \otimes N \to S_A \otimes M$, so ist $\frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x) = 0$ in $S_A \otimes M$, also $1 \otimes x = 0$ in $S_A \otimes M$. Das bedeutet, daß es ein Element $b \in A$ gibt mit $b \cdot x = 0$ in M. Daraus folgt wiederum $1 \otimes x = 0$ in $S_A \otimes N$, also auch $y = \frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x) = 0$ in $S_A \otimes N$.

HILFSSATZ 7. *Es sei I eine vollständige geordnete Indexmenge mit erstem Element 0, $\{S_i\}_{i \in I}$ eine Familie unitärer Ringe mit derselben Eins, für die gilt $S_i \subseteq S_k$, falls $i \leqq k$, $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. D_0 sei eine Derivation von S_0, D_i die universelle Ausdehnung von D_0 auf S_i, D die universelle Ausdehnung von D_0 auf S. Dann gilt*

a) *Ist D_i tensorielle Ausdehnung von D_0 auf S_i für alle $i \in I$, so ist D tensorielle Ausdehnung von D_0 auf S.*

b) *Ist $S_i D_i S_i / S_i D_i S_0$ torsionsfrei für alle $i \in I$, so ist auch SDS/SDS_0 torsionsfrei.*

c) *Ist $S_i D_i S_i / S_i D_i S_0$ v-dividierbar bezüglich eines Elementes $v \in S_0$, für alle $i \in I$, so ist auch SDS/SDS_0 v-dividierbar. Dabei nennen wir einen Modul M v-dividierbar, wenn gilt $M = v \cdot M$.*

BEWEIS. Es sei $M_i = S_i D_i S_i$ für alle $i \in I$. Wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung ([2], §1) ist D_k für $i \leqq k$ universelle Ausdehnung von D_i auf S_k. Die zugehörige S_i-lineare Abbildung von M_i in M_k bezeichnen wir mit φ_{ik}. Es gilt dann: $D_k = \varphi_{ik} \circ D_i$ auf S_i und daher $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ auf M_i für alle $i \leqq j \leqq k$.

Zu der Familie der M_i und φ_{ik} gibt es einen S-Modul M, den direkten Limes, mit folgenden charakteristischen Eigenschaften:

1. Für jedes $j \in I$ gibt es eine S_j-lineare Abbildung χ_j von M_j in M mit $\chi_i = \chi_k \circ \varphi_{ik}$ für alle $i \leqq k$.

2. $M = \bigcup_{i \in I} \chi_i(M_i)$.

3. Ist M' ein S-Modul mit einem System von S_i-linearen Abbildungen χ_i' von M_i in M' mit $\chi_i' = \chi_k' \circ \varphi_{ik}$ für alle $i \leqq k$, so gibt es eine S-lineare Abbildung Λ von M in M' mit $\chi_i' = \Lambda \circ \chi_i$ für alle $i \in I$.

M ist durch die Eigenschaften 1. bis 3. bis auf S-lineare Isomorphie eindeutig bestimmt. Ferner gilt: $\operatorname{Kern}(\chi_i) = \bigcup_{i \leqq k} \operatorname{Kern}(\varphi_{ik})$.

Wir definieren eine Abbildung D von S in M folgendermaßen: Jedes $x \in S$ liegt in einem S_i. Wir setzen $Dx = \chi_i \circ D_i x$. Gilt auch $x \in S_k$ mit $i < k$, so gilt: $\chi_k D_k x = \chi_k \circ \varphi_{ik} \circ D_i x = \chi_i \circ D_i x$. Also hängt die Definition nicht von dem gewählten i ab.

D ist eine Derivation von S und vermöge $D = \chi_0 \circ D_0$ auf S_0 eine Ausdehnung von D_0 auf S. Ferner ist $SDS = M$. Wir zeigen, daß D universelle Ausdehnung von D_0 auf S ist.

Es sei D' eine beliebige Ausdehnung von D_0 auf S, $M'=SD'S$. Da die Einschränkung von D' auf S_i eine Ausdehnung von D_0 auf S_i ist, gibt es für jedes $i\in I$ eine S_i-lineare Abbildung χ_i' von M_i in M' mit $D'=\chi_i'\circ D_i$ auf S_i; denn D_i ist die universelle Ausdehnung von D_0 auf S_i. Zusammen mit $D_k=\varphi_{ik}\circ D_i$ auf S_i für $i\leq k$ erhält man $\chi_i'=\chi_k'\circ\varphi_{ik}$. Also gibt es nach Eigenschaft 3. von M eine S-lineare Abbildung Λ von M in M' mit $\chi_i'=\Lambda\circ\chi_i$ für alle $i\in I$. Das ergibt $D'=\Lambda\circ D$, d.h. D ist universelle Ausdehnung von D_0 auf S.

Zu a): Ist D_i tensorielle Ausdehnung von D_0, so bedeutet das, daß die S_0-lineare Abbildung φ_{0i} universelle S_i-Einbettung des S_0-Moduls M_0 ist. Es sei ψ: $M_0\to M'$ eine beliebige S_0-lineare Abbildung von M_0 in einen S-Modul M'. ψ ist dann auch für alle $i\in I$ eine S_i-Einbettung von M_0, weil M' auch ein S_i-Modul ist. Also gibt es eine S_i-lineare Abbildung ψ_i von $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ in M' mit $\psi=\psi_i\circ\varphi_{0i}$. $\tilde{\chi}_i$ sei die Einschränkung von χ_i auf $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$. Wir zeigen: $\psi_i(\mathrm{Kern}\,(\tilde{\chi}_i))=0$:

Es sei $y\in\mathrm{Kern}\,(\tilde{\chi}_i)$. Wegen $\mathrm{Kern}\,(\chi_i)=\bigcup_{i\leq k}\mathrm{Kern}\,(\varphi_{ik})$ gilt dann für ein passendes $k\geqq i$: $\varphi_{ik}(y)=0$. Wegen $\psi=\psi_i\circ\varphi_{0i}=\psi_k\circ\varphi_{0k}$ und $\varphi_{0k}=\varphi_{ik}\circ\varphi_{0i}$ folgt, weil das Bild von M_0 bei φ_{0i} den Modul $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ erzeugt: $\psi_i=\psi_k\circ\varphi_{ik}$ auf $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$, also $\psi_i(y)=\psi_k(\varphi_{ik}(y))=0$.

Folglich induziert ψ_i in natürlicher Weise eine S_i-lineare Abbildung ψ_i' von $S_i\cdot\chi_i\circ\varphi_{0i}(M_0)=S_i\cdot\chi_0(M_0)$ in M' mit $\psi=\psi_i'\circ\chi_0$. Für $i<k$ ist $S_i\cdot\chi_0(M_0)\subseteqq S_k\cdot\chi_0(M_0)$ und ψ_k' Fortsetzung von ψ_i'. Daher induzieren die Abbildungen ψ_i' in natürlicher Weise eine Abbildung Ψ von $\bigcup_{i\in I}S_i\cdot\chi_0(M_0)=S\cdot\chi_0(M_0)$ in M' mit $\psi=\Psi\circ\chi_0$. Ψ ist S-linear.

Damit ist gezeigt, daß χ_0 universelle S-Einbettung von M_0 ist, also $S\cdot\chi_0(M_0)=S\otimes_{S_0}M_0$, q.e.d.

Zu b): Es sei $S_iD_iS_i/S_iD_iS_0$ für alle $i\in I$ torsionsfrei, $s\in S$, $s\neq 0$, $x\in M=SDS$ und $s\cdot x\in S\cdot\chi_0(M_0)=SDS_0$. Wir zeigen, daß daraus folgt: $x\in S\cdot\chi_0(M_0)$. Beweis. Für hinreichend großes i hat man: $s\in S_i$, $x=\chi_i(z)$, $z\in M_i$ und $\chi_i(s\cdot z)=\sum_t s_t\cdot\chi_0(y_t)$ mit $s_t\in S_i$, $y_t\in M_0$. Das bedeutet: $\chi_i\left(s\cdot z-\sum_t s_t\cdot\varphi_{0i}(y_t)\right)=0$. Wegen $\mathrm{Kern}\,(\chi_i)=\bigcup_{i\leq k}\mathrm{Kern}\,(\varphi_{ik})$ folgt daraus: $\varphi_{ik}(s\cdot z)=\sum_t s_t\cdot\varphi_{ik}\circ\varphi_{0i}(y_t)$ für ein $k\geqq i$, also $s\cdot\varphi_{ik}(z)=\sum_t s_t\cdot\varphi_{0k}(y_t)\in S_k\cdot\varphi_{0k}(M_0)=S_kD_kS_0$. Wegen der vorausgesetzten Torsionsfreiheit von $M_k/S_kD_kS_0$ folgt daraus: $\varphi_{ik}(z)\in S_k\cdot\varphi_{0k}(M_0)$, also

$$x=\chi_i(z)=\chi_k\circ\varphi_{ik}(z)\in S_k\cdot\chi_k\circ\varphi_{0k}(M_0)\subseteqq S\cdot\chi_0(M_0),\quad\text{q.e.d.}$$

Zu c): Ist $x\in M$, so ist $x=\chi_i(z)$ mit $z\in M_i$ für hinreichend großes $i\in I$. $M_i/S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ ist nach Voraussetzung v-dividierbar. Also gibt es ein $y\in M_i$ mit $z\equiv v\cdot y \bmod S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$. Die Anwendung von χ_i liefert:

$$x\equiv v\cdot\chi_i(y)\bmod S\cdot\chi_0(M_0),\quad\text{q.e.d.}$$

Hilfssatz 8. *Es sei A ein Körper, $B=A(x)$ ein Oberkörper, x transzendent über A, T ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper B und dem*

Primideal $\mathfrak{P}$, $S=T\cap A$, T *unverzweigt über* S *und* $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. *Ferner sei* Δ *eine Derivation von* S, D *die universelle Ausdehnung von* Δ *auf* T. *Dann gilt:* D *ist tensorielle Ausdehnung von* Δ *auf* T *und* TDT/TDS *ist ein torsionsfreier Divisionsmodul.*

BEWEIS. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß x in T liegt. $u\in S$ sei ein Primelement von T. Wir definieren rekursiv eine Folge von Elementen $x_i\in T$ wie folgt: $x_0=x$; ist x_{n-1} schon definiert, so gibt es wegen $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ein Element $a_{n-1}\in S$ mit $x_{n-1}-a_{n-1}\in\mathfrak{P}$. Wir definieren dann x_n durch $x_{n-1}-a_{n-1}=u\cdot x_n$. Die Folge der x_i genügt den Voraussetzungen des Satzes 9 in [1], angewandt auf den Fall eines einstufigen diskreten Bewertungsringes. Setzt man also $T_i=S[x_i]$, so bilden die T_i eine aufsteigende Folge von Ringen, und es gilt: $T=\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i\right)_{\mathfrak{P}}=\left\{\frac{y}{z};\ y,z\in\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i, z\notin\mathfrak{P}\right\}$. Ferner gilt offenbar: $B=A(x_i)$ für alle i, also sind alle x_i transzendent über A. D_i bezeichne die universelle Ausdehnung von Δ auf T_i. Nach [2], Satz 4 gilt: $T_iD_iT_i=T_i\otimes_S S\Delta S\oplus T_i\cdot D_ix_i$, wobei D_ix_i als Unbestimmte zu behandeln ist. Also ist D_i tensorielle Ausdehnung von Δ und $T_iD_iT_i/T_iD_iS$ ist torsionsfrei. Nach Hilfssatz 7 übertragen sich diese beiden Eigenschaften auf die universelle Ausdehnung D' von Δ auf $T'=\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i$. T ist Quotientenring von T'. Nach [2], Satz 6 gilt: $TDT=T\otimes_{T'}T'D'T'$. Nach Hilfssatz 6 enthält dann TDT im Sinne kanonischer Monomorphie den Modul $T\otimes_{T'}T'D'S$, und, weil D' tensorielle Ausdehnung von Δ ist, gilt $T'D'S=T'\otimes_S S\Delta S$. Beachtet man noch die kanonische Isomorphie $T\otimes_{T'}T'\otimes_S S\Delta S=T\otimes_S S\Delta S$, so sieht man, daß D tensorielle Ausdehnung von Δ auf T ist. Ferner ist $TDT/TDS=T\otimes_{T'}(T'D'T'/T'D'S)$ torsionsfrei, weil $T'D'T'/T'D'S$ torsionsfrei ist und T Quotientenring von T' ist.

Ist schließlich $y\in T$, so gibt es wegen $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ein $z\in S$ und ein $v\in T$ mit $y=z+u\cdot v$. Es folgt wegen $u\in S$: $Dy\equiv u\cdot Dv \bmod TDS$, also ist TDT/TDS ein Divisionsmodul.

HILFSSATZ 9. *Es sei* A *ein Körper,* B *eine endliche, separabel algebraische Körpererweiterung von* A, T *ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper* B *und dem Primideal* $\mathfrak{P}$, $S=T\cap A$, T *unverzweigt über* S *und* $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. *Ferner sei* Δ *eine Derivation von* S, D *die universelle Ausdehnung von* Δ *auf* T. *Dann gilt:* D *ist tensorielle Ausdehnung von* Δ *auf* T *und* $TDT/TDS=(0)$.

BEWEIS. Weil B eine endliche, separabel algebraische Körpererweiterung von A ist, gibt es ein Element $x\in T$ mit $B=A(x)$. Wie beim Beweis von Hilfssatz 8 definieren wir eine Folge von Elementen $x_i\in T$ mit $x_0=x$, $x_{n-1}-a_{n-1}=u\cdot x_n$, wobei u ein Primelement von S ist und die a_i in S liegen. Man hat dann wieder nach [1], Satz 9: $T=\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i\right)_{\mathfrak{P}}$ mit $T_i=S[x_i]$. Es sei $g_i(X)\in S[X]$ ein Primpolynom von $S[X]$ mit $g_i(x_i)=0$. Man hat dann nach dem Gaußschen Satz: $T_i=S[x_i]\cong S[X]/(g_i(X))$. Außerdem gilt $g_i'(x_i)\neq 0$ wegen der Separabilität von x_i über A. Aus [2], Satz 7 folgt daher, daß

die universelle Ausdehnung von Δ auf T_i tensoriell ist. Nach Hilfssatz 7 und [2], Satz 6 ist dann auch D tensorielle Ausdehnung von Δ.

Schließlich hat man nach [2], Anmerkung 10, daß $TDT/TDS = M(T/S)$ ist. Andererseits ist aber wegen der Unverzweigtheit von T über S zusammen mit $T/\mathfrak{P} = S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ nach Satz 1 $M(T/S)/\mathfrak{P} \cdot M(T/S) = (0)$, also $M(T/S) = (0)$, weil $M(T/S)$ endlich erzeugbar ist, q.e.d.

Beweis von Satz 9. Wir betrachten die diskreten Bewertungsringe R' mit $R \subseteqq R' \subseteqq \hat{R}$ und der Eigenschaft, daß die universelle Ausdehnung D' von D auf R' tensoriell und $R'D'R'/R'D'R$ torsionsfrei ist. Nach Hilfssatz 7 übertragen sich diese Eigenschaften dann auf die Vereinigung einer aufsteigenden Folge solcher Ringe (die wieder ein diskreter Bewertungsring ist). Also gibt es nach dem Lemma von Zorn einen im Sinne der durch die Relation $\subseteqq$ gegebenen Anordnung maximalen diskreten Bewertungsring $\overline{R}$ mit $R \subseteqq \overline{R} \subseteqq \hat{R}$, so daß für die universelle Ausdehnung $\overline{D}$ von D auf $\overline{R}$ die angegebenen Eigenschaften gelten. Es ist $\overline{R} = \hat{R}$. Wäre nämlich $\overline{R} \neq \hat{R}$, so gäbe es ein Element $x \in \hat{R}$, $x \notin \overline{R}$. Es sei $\overline{K}$ der Quotientenkörper von $\overline{R}$, $R'' = \hat{R} \cap \overline{K}(x)$. x ist entweder transzendent oder, weil R die Charakteristik Null hat, separabel algebraisch über $\overline{K}$. Außerdem ist R'' über $\overline{R}$ unverzweigt und beide Ringe haben denselben Restklassenkörper wegen $R \subseteqq \overline{R} \subseteqq R'' \subseteqq \hat{R}$. Nach Hilfssatz 8 bzw. Hilfssatz 9 ist daher die universelle Ausdehnung D'' von $\overline{D}$ auf R'' tensoriell und es gilt: $R''D''R''/R''D''\overline{R}$ ist torsionsfrei. Wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung ist D'' auch universelle Ausdehnung von D auf R'' und wegen Hilfssatz 4 ist D'' sogar tensorielle Ausdehnung von D auf R'' (s. [2], §1). Hat man nun ein Element $y \in R''D''R''$ und ein Element $r \in R''$, $r \neq 0$ mit $r \cdot y \in R''D''R$, so folgt aus der Torsionsfreiheit von $R''D''R''/R''D''\overline{R}$, daß $y \in R''D''\overline{R}$ gilt. y ist also Torsionselement von $R''D''\overline{R}/R''D''R = R'' \otimes_{\overline{R}} \overline{R}\overline{D}\overline{R}/R'' \otimes \overline{R}\overline{D}R = R'' \otimes_{\overline{R}} (\overline{R}\overline{D}\overline{R}/\overline{R}\overline{D}R)$. Nach Voraussetzung über $\overline{R}$ ist $\overline{R}\overline{D}\overline{R}/\overline{R}\overline{D}R$ torsionsfrei, also ist nach [1], Satz 5 auch $R'' \otimes_{\overline{R}} (\overline{R}\overline{D}\overline{R}/\overline{R}\overline{D}R)$ torsionsfrei, also gilt $y \in R''D''R$. Damit ist auch die Torsionsfreiheit von $R''D''R''/R''D''R$ gezeigt. R'' hat also die Eigenschaften, denen gegenüber $\overline{R}$ maximal ist, was den gesuchten Widerspruch liefert.

Daß schließlich $\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}R$ ein Divisionsmodul ist, ergibt sich wie beim Beweis von Hilfssatz 8 aus der Tatsache, daß $\hat{R}$ über R unverzweigt ist und beide Ringe denselben Restklassenkörper haben.

Damit ist Satz 9 in allen Teilen bewiesen.

2. *Ausdehnung einer Derivation von* P *auf* $\hat{R}$

Voraussetzungen. *Zusätzlich zu den in* §3 *angegebenen Voraussetzungen und Bezeichnungen sei im folgenden:*

R ein diskreter Bewertungsring der Charakteristik Null, $\mathsf{P} = R \cap k$ (also ebenfalls ein diskreter Bewertungsring oder $\mathsf{P} = k$), *δ eine Derivation von* P, *$\hat{D}$ die*

universelle Ausdehnung von δ auf $\hat{R}$, $\hat{d}$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P, $\mathfrak{R}$ *über* $\mathfrak{k}$ *endlich inseparabel.*

Dabei definieren wir:

DEFINITION. *Sind $A \subseteq B$ zwei Körper, so heißt B „endlich inseparabel" über A, wenn es einen Zwischenkörper C zwischen A und B gibt, der über A eine endliche separierende Transzendenzbasis besitzt und über dem B eine endliche, rein inseparable algebraische Erweiterung ist.*

(Daraus folgt insbesondere, daß B endliche Dimension über A besitzt. Ferner folgt, wenn B Primzahlcharakteristik p hat, daß B über A endlichen p-Grad besitzt, jedoch gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung).

Wir zeigen unter den angegebenen Voraussetzungen, daß $\hat{D}$ tensorielle Ausdehnung von δ ist. Dabei verwenden wir eine Konstruktion, in deren Verlauf wir für die Überlegungen des nächsten Kapitels im Spezialfall, daß δ die triviale Derivation von P ist, wichtige Untermoduln von $\hat{R}\hat{d}\hat{R}$ gewinnen.

Es seien $t_1, \ldots, t_m \in R$ Repräsentanten einer separierenden Transzendenzbasis des nach Voraussetzung existierenden über $\mathfrak{k}$ separablen Zwischenkörpers $\mathfrak{Z}$ zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{k}$, über dem $\mathfrak{R}$ eine endliche, rein inseparable Erweiterung ist.

Weil die Restklassen mod $\mathfrak{P}$ der $t_1, \ldots, t_m$ algebraisch unabhängig über $\mathsf{P}+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}=\mathfrak{k}$ sind und P ein Bewertungsring oder ein Körper ist, sind die $t_1, \ldots, t_m$ algebraisch unabhängig über P. Ferner gilt wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $t_1, \ldots, t_m$ mod $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m] = (\mathfrak{P} \cap \mathsf{P}) \cdot \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m]$.

1. Fall: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P} \neq (0)$, also P ein diskreter Bewertungsring. In diesem Falle ist $\Sigma = \left\{ \frac{a}{b} ;\ a, b \in \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m],\ b \notin \mathfrak{P} \right\}$ ein diskreter Bewertungsring, der in R liegt, also $\Sigma = R \cap Q(\Sigma)$.

2. Fall: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P} = (0)$. In diesem Falle ist k trivial bewertet, also $\mathsf{P} = k$ ein Körper und folglich der ganze Körper $\mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)$ in R enthalten und daher trivial bewertet. Es sei u ein Primelement von R. Weil $\mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)$ trivial bewertet ist, u dagegen einen von Null verschiedenen Wert besitzt, ist u transzendent über diesem Körper und folglich

$$\Sigma = \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u]_{(u)} = \left\{ \frac{a}{b} ;\ a, b \in \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u],\ b \notin u \cdot \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u] \right\}$$

ein diskreter Bewertungsring, der in R enthalten ist, also $\Sigma = R \cap Q(\Sigma)$. Setzen wir $u = t_{m+1}$, so kann man auch in diesem Falle schreiben

$$\Sigma = \left\{ \frac{a}{b} ;\ a, b \in \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_{m+1}],\ b \notin \mathfrak{P} \right\}$$

analog zu Fall 1.

In beiden Fällen ist der Restklassenkörper $\Sigma + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{k}(\dot{t}_1, \ldots, \dot{t}_m)$, wenn $\dot{t}_i$ die Restklasse von t_i mod $\mathfrak{P}$ bezeichnet, und daher $\mathfrak{Z}$ separabel algebraisch über $\Sigma + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$.

Δ bezeichne die universelle Ausdehnung von δ auf Σ. Nach [2], Satz 4 und 6 gilt $\Sigma\Delta\Sigma = \Sigma \otimes_{\mathsf{P}} \mathsf{P}\delta\mathsf{P} \oplus \Sigma\cdot\Delta t_1 \oplus \cdots \oplus \Sigma\cdot\Delta t_r$, wobei die Δt_i als Unbestimmte zu behandeln sind, mit $r = \begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}}, & \text{falls P ein diskreter Bewertungsring ist,} \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} + 1, & \text{falls P ein Körper ist.} \end{cases}$

Man hat daher: Δ ist tensorielle Ausdehnung von δ auf Σ, und $\Sigma\Delta\Sigma/\Sigma\Delta\mathsf{P}$ ist ein freier Σ-Modul vom Rang r.

Wir betrachten nun die diskreten Bewertungsringe S' mit folgenden Eigenschaften: 1. $\Sigma \subseteq S' \subseteq \hat{R}$, 2. S' ist komplett, 3. $S' + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{S}$, 4. S' ist unverzweigt über Σ, 5. die universelle Ausdehnung D' von Δ auf S' ist tensorielle Ausdehnung, 6. $S'D'S', S'D'\Sigma$ ist torsionsfrei, 7. $S'D'S'/S'D'\Sigma$ ist ein Divisionsmodul.

Nach Hilfssatz 4, Hilfssatz 7 und Satz 9 übertragen sich diese sieben Eigenschaften sofort auf die Komplettierung einer aufsteigenden Folge solcher Ringe. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also einen bezüglich der durch die Relation $\subseteq$ gegebenen Anordnung maximalen diskreten Bewertungsring S mit den Eigenschaften 1. bis 7. Wir zeigen: $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$.

Beweis. Wäre $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \neq \mathfrak{S}$, so gäbe es ein Element $\dot{x} \in \mathfrak{S}$, $\dot{x} \notin S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Weil $\dot{x}$ als Element von $\mathfrak{S}$ separabel algebraisch über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ist, genügt es über diesem Körper einer irreduziblen normierten Gleichung ohne mehrfache Nullstellen. Da S komplett ist, gibt es nach dem Lemma von Hensel in $\hat{R}$ ein in der Restklasse $\dot{x}$ liegendes Element x, das über S einer normierten Gleichung desselben Grades genügt, wie $\dot{x}$ über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Sei $S'' = \hat{R} \cap Q(S)(x)$. Aus der Gradrelation folgt: S'' ist unverzweigt über S und hat den Restklassenkörper $(S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P})(\dot{x})$. Ferner ist S'' komplett, weil S komplett und $Q(S'')$ endlich algebraisch über $Q(S)$ ist. Ein Repräsentantensystem für eine Basis des Restklassenkörpers von S'' über dem von S bildet daher eine Basis für S'' über S. Man hat also $S'' = S[x]$. $g(x)$ sei das normierte Minimalpolynom für x über S. Aus Gradgründen ist dann das beim Übergang zu Restklassen $\bmod \mathfrak{P}$ entstehende Polynom das Minimalpolynom für $\dot{x}$ über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Weil $\dot{x}$ über diesem Körper separabel algebraisch ist, hat man daher $g'(x) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$, d.h. $g'(x)$ ist Einheit in S''.

D'' sei die universelle Ausdehnung von D auf S'', D die universelle Ausdehnung von Δ auf S. Nach [2], Satz 7 ist D'' wegen $g'(x) \neq 0$ tensorielle Ausdehnung von D. Also ist D'' wegen Hilfssatz 4 auch tensorielle Ausdehnung von Δ. Ferner folgt aus $g(x) = 0$: $g'(x) \cdot D''x = 0 \bmod S''D''S$, also, weil $g'(x)$ Einheit in S'' ist, $D''x \in S''D''S$ und damit $S''D''S'' = S''D''S = S'' \otimes_S SDS$. Es ist daher $S''D''S''/S''D''\Sigma = S'' \otimes_S (SDS/SD\Sigma)$ torsionsfreier Divisionsmodul, weil das für $SDS/SD\Sigma$ gilt (s. a. [1], Satz 5). Also erfüllt S'' die Eigenschaften 1. bis 7. im Widerspruch zur Maximalität von S bezüglich dieser Eigenschaften. Daher gilt $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$.

Wir betrachten nun die Struktur von $\hat{R}$ über S. Der Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von $\hat{R}$ ist nach Voraussetzung endlich algebraisch (und rein inseparabel) über

dem Restklassenkörper $\mathfrak{S}$ von S. Ist u ein Primelement von R, π ein Primelement von Σ und e der Verzweigungsexponent von R über Σ, so bilden die Werte der Elemente $\{\pi^i \cdot u^j;\ i=0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqq j \leqq e-1\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Werte der Elemente von $\hat{R}$. Ist schließlich noch $1=y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Repräsentantensystem einer Basis von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{S}$, so sieht man durch Reihenentwicklung der Elemente von $\hat{R}$ nach $\pi^i \cdot u^j$ mit Koeffizienten der Form $\sum_{l=1}^{n} s_l \cdot y_l$, $s_i \in S$, und passende Umordnung, daß die Elemente $\{y_l \cdot u^j;\ 1 \leqq l \leqq n,\ 0 \leqq j \leqq e-1\}$ eine Basis von $\hat{R}$ über S bilden. Also ist der Quotientenkörper von $\hat{R}$ eine endliche, separabel algebraische Erweiterung des Quotientenkörpers von S. (Falls P ein Körper ist, hat man $\pi=u$ und $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}$, also $\hat{R}=S$.)

$\hat{D}$ bezeichne die universelle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$. Nach [2], Satz 11 gilt: $\hat{D}$ ist tensorielle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$, und $\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}S$ ist endlich erzeugbar. Wegen Hilfssatz 4 ist $\hat{D}$ dann auch tensorielle Ausdehnung von Δ und δ. Ferner ist $\hat{D}$ wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung auch universelle Ausdehnung von Δ und δ auf $\hat{R}$.

Schließlich genügt jedes Element $x \in \hat{R}$ einem Minimalpolynom $f(X)$ über S mit $f'(x) \neq 0$ wegen der Separabilität der Erweiterung. Es folgt:

$$f'(x) \cdot D\,x \equiv 0 \bmod \hat{R}\hat{D}S, \qquad \text{d.h. } \hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}S \text{ ist ein Torsionsmodul.}$$

SATZ 10. *Mit den oben erklärten Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: Jede Derivation von* P *besitzt eine tensorielle Ausdehnung auf* R.

BEWEIS. Nach dem soeben gezeigten besitzt jede Derivation von P eine tensorielle Ausdehnung auf $\hat{R}$. Aus Hilfssatz 4 und [2], Satz 2 folgt, daß die Einschränkung dieser Ausdehnung auf R die gesuchte tensorielle Ausdehnung der Derivation von P auf R ist.

ANMERKUNG. *Man überlegt leicht, daß Satz* 10 *auch ohne die Voraussetzung, daß* $\mathfrak{R}$ *endlich inseparabel über* $\mathfrak{k}$ *ist, richtig ist.*

Für den Spezialfall, daß δ die triviale Derivation von P und daher dann $\hat{D}=\hat{d}$ ist, erhält man aus der obigen Konstruktion:

SATZ 11. *Mit den oben erklärten Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: Es gibt in* $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ *Untermoduln* $H \cong \hat{R} \otimes_{\Sigma} M(\Sigma/\mathsf{P})$ *und* $N \cong \hat{R} \otimes_{S} M(S/\mathsf{P})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$M(\hat{R}/\mathsf{P}) \supseteq N \supseteq H$,

H ist ein freier $\hat{R}$-Modul vom Rang $\begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} & \text{falls } \mathsf{P} \neq k \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} + 1 & \text{falls } \mathsf{P} = k, \end{cases}$

$N/H \cong \hat{R} \otimes_S M(S/\Sigma)$ *ist ein torsionsfreier Divisionsmodul,*

$M(\hat{R}/\mathsf{P})/N \cong M(\hat{R}/S)$ *ist ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul* $(=(0)$ *für* $\mathsf{P}=k)$.

3. *Folgerungen für die Struktur von* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$

Satz 12. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen in §3 sei:*

Die Charakteristik von R gleich Null,

$\tilde{\mathfrak{P}} = R \cap k$, $\tilde{\mathfrak{k}}$ *der Restklassenkörper von* $\tilde{\mathfrak{P}}$,

E, F, T, D *die in Satz 6 eingeführten Moduln.*

Im Falle $p > 0$ *setzen wir noch voraus, daß* $\mathfrak{K}$ *über* $\tilde{\mathfrak{k}}$ *endlich inseparabel im Sinne der zu Anfang von Abschnitt 2 gegebenen Definition ist.*

Dann gilt:

a) $\operatorname{Rang} F = \begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{K}}{\tilde{\mathfrak{k}}}, & \text{falls } \tilde{\mathfrak{P}} \neq k \\ \dim \frac{\mathfrak{K}}{\tilde{\mathfrak{k}}} + 1, & \text{falls } \tilde{\mathfrak{P}} = k. \end{cases}$

b) $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) \subseteq M(R/\mathfrak{P})$ *in natürlicher Weise, und* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *enthält die Torsion von* $M(\hat{R}/\mathfrak{P})$.

c) *Im Falle* $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ *ist die Torsion von* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *endlich erzeugbar und isomorph zur Torsion von* $M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst folgenden Hilfssatz (s. a. [1], Satz 7):

Hilfssatz 10. *Es sei S ein diskreter Bewertungsring, M ein S-Modul, H ein freier Untermodul endlichen Ranges. Ferner gelte:* $M = F \oplus T \oplus D$, $M/H = \tilde{T} \oplus \tilde{D}$, *wobei F ein freier Modul endlichen Ranges, T und* $\tilde{T}$ *endlich erzeugbare Torsionsmoduln, D und* $\tilde{D}$ *torsionsfreie Divisionsmoduln sind. Dann gilt: Rang F = Rang H.*

Beweis. 1. Rang $F \leqq$ Rang H: Wir setzen zur Abkürzung $F' = M/(T+D)$, $H' = (H+T+D)/(T+D)$. Dann ist $F' \cong F$ und H' ist als homomorphes Bild von H endlich erzeugbar mit Rang $H' \leqq$ Rang H.

Man hat dann einerseits:

$$M/(H+T+D) \cong \big(M/(T+D)\big)/\big((H+T+D)/(T+D)\big) = F'/H'$$

ist endlich erzeugbar als homomorphes Bild von F'.

Andererseits gilt:

$$M/(H+T+D) \cong (M/H)/\big((H+T+D)/H\big)$$

ist homomorphes Bild von $M/H = \tilde{T} \oplus \tilde{D}$.

Als endlich erzeugbarer Modul ist $M/(H+T+D)$ direkte Summe zyklischer Moduln, enthält also kein von Null verschiedenes Element unendlicher Höhe. Da alle Elemente von $\tilde{D}$ und daher auch ihre Bilder in $M/(H+T+D)$ unendliche Höhe haben, liegt ganz $\tilde{D}$ im Kern des Homomorphismus, und daher ist $M/(H+T+D)$ homomorphes Bild von $\tilde{T}$, also ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Es gibt also ein Element $x \neq 0$, $x \in S$, das den ganzen Modul

annulliert. Wegen der Isomorphie mit F'/H' bedeutet das: $x \cdot F' \subseteq H'$. Weil F' frei ist, gilt $x \cdot F' \cong F'$ und daher: $\operatorname{Rang} F = \operatorname{Rang} F' = \operatorname{Rang} x \cdot F' \leqq \operatorname{Rang} H' \leqq \operatorname{Rang} H$.

2. $\operatorname{Rang} F \geqq \operatorname{Rang} H$: $y_1, \ldots, y_r$ sei eine Basis von H. Dann ist $r = \operatorname{Rang} H$. In $M = F \oplus T \oplus D$ gestatten die y_i eine eindeutige Zerlegung $y_i = f_i + t_i + d_i$ mit $f_i \in F$, $t_i \in T$, $d_i \in D$. Wir zeigen, daß die $f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig sind. Dann enthält also F mindestens r linear unabhängige Elemente und es ist daher $\operatorname{Rang} F \geqq \operatorname{Rang} H$.

Weil die Torsion von M/H nach Voraussetzung endlich erzeugbar ist, enthält sie kein von Null verschiedenes Element unendlicher Höhe. Daher gilt: $H \cap D = (0)$; denn wäre $z \neq 0$, $z \in H \cap D$, so gäbe es, weil z in dem endlich erzeugbaren Modul H eine endliche Höhe hat, in D aber unendliche Höhe, ein Element $z' \in D$, $z' \notin H$ und ein $s \in S$ mit $s \cdot z' - z \in H$. z' repräsentierte dann ein Torsionselement von M/H. Dieses hätte aber als homomorphes Bild eines Elementes aus D unendliche Höhe in M/H im Widerspruch zu dem oben festgestellten.

Sei nun $\sum_{i=1}^{r} s_i \cdot f_i = 0$, so folgt $\sum_{i=1}^{r} s_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{r} s_i \cdot t_i + \sum_{i=1}^{r} s_i \cdot d_i$. Es sei nun $s \neq 0$, $s \in S$ ein Element mit $s \cdot t_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dann gilt: $\sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot d_i$. Daraus sieht man, daß das Element $y = \sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot y_i$ in $H \cap D$ liegt, also Null ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit der y_i folgt daraus $s \cdot s_i = 0$ und weiter $s_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der $f_1, \ldots, f_r$ nachgewiesen.

BEWEIS von Satz 12. Ist d die Differentiation von R über P, $\hat{d}$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P, so ist $\hat{d}$ die universelle Ausdehnung von d auf $\hat{R}$ und man hat daher nach Satz 9: $\hat{d}$ ist tensorielle Ausdehnung von d auf $\hat{R}$ und $\hat{R}\hat{d}\hat{R}/\hat{R}\hat{d}R$ ist torsionsfrei. Das bedeutet: $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P}) \subseteq M(\hat{R}/\mathsf{P})$ in natürlicher Weise und jedes Torsionselement von $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ liegt bereits in $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$. Damit ist b) gezeigt.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $\mathsf{P} = \tilde{\mathsf{P}}$.

T' sei die Torsion von $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ und damit nach b) auch die Torsion von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$. N sei der in Satz 11 vorkommende Modul. N ist torsionsfrei, also gilt $N \cap T' = (0)$. Daher ist ein zu T' isomorpher Modul in $M(\hat{R}/\mathsf{P})/N$ enthalten. $M(\hat{R}/\mathsf{P})/N$ ist aber nach Satz 11 ein endlich erzeugbarer Modul, also ist auch T' endlich erzeugbar. Ist D der maximale Divisionsuntermodul von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$, so folgt: $T' \cap D = (0)$; denn sonst enthielte T' Elemente unendlicher Höhe, was der endlichen Erzeugbarkeit widerspricht.

Es sei $t = e + d$ die Zerlegung eines Torsionselementes t in $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P}) = E \oplus D$, $e \in E$, $d \in D$. $r \neq 0$, $r \in \hat{R}$ sei ein Annullator von t. Es folgt $r \cdot e = -r \cdot d$, also liegt $r \cdot d$ in $E \cap D = (0)$. Weil D kein Torsionselement enthält, folgt daraus $d = 0$, also $t = e$. Damit hat man: $T' \subseteq E$, also $T' = T$.

Wegen $E \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$ ist damit c) bewiesen.

Zum Beweis von a) betrachten wir zuerst wieder den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$. Nach Satz 6, angewandt auf R über $\mathfrak{P}$ bzw. $\hat{R}$ über $\mathfrak{P}$ hat man: $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) = E \oplus D$ mit $E \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$ und auch $M(\hat{R}/\mathfrak{P}) = \hat{E} \oplus \hat{D}$ mit $\hat{E} \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$, also $E \cong \hat{E}$. Es genügt also, den Rang des freien Bestandteils von $\hat{E}$ zu bestimmen.

Sei etwa $\hat{E} = \hat{F} \oplus \hat{T}$, $\hat{F}$ freier Modul, $\hat{T}$ endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Wir betrachten mit den im Abschnitt 2. eingeführten Moduln H und N den Modul $M'' = M(\hat{R}/\mathfrak{P})/H$. Er enthält den Untermodul $N'' = N/H$, der als Divisionsmodul direkter Summand ist. Der komplementäre Summand in einer Zerlegung von M'' ist isomorph zu $M(\hat{R}/\mathfrak{P})/N$, also ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Weil N'' torsionsfrei ist, folgt aus Hilfssatz 10: Rang $\hat{F}$ = Rang H.

Nach Satz 11 hat man ferner Rang $H = \begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\tilde{\mathfrak{t}}}, & \text{falls } \mathfrak{P} \neq k \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\tilde{\mathfrak{t}}} + 1, & \text{falls } \mathfrak{P} = k. \end{cases}$

Damit ist a) für den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ bewiesen.

Im Fall $\mathfrak{P} \neq \tilde{\mathfrak{P}}$ sei d die Differentiation von R über $\mathfrak{P}$, $\tilde{d}$ die Differentiation von R über $\tilde{\mathfrak{P}}$. Man hat dann nach [2], Anmerkung 10: $R\tilde{d}R = RdR/Rd\tilde{\mathfrak{P}}$. Weil $\tilde{\mathfrak{P}}$ im Quotientenkörper von $\mathfrak{P}$ liegt, gibt es zu jedem Element $x \in \tilde{\mathfrak{P}}$ ein Element $y \neq 0$, $y \subseteq \mathfrak{P}$ mit $y \cdot x \in \mathfrak{P}$. Es folgt: $y \cdot dx = 0$, also ist $Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul. Man hat also $\hat{R} \otimes_R M(R/\tilde{\mathfrak{P}}) = \hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$, wo $R \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist, weil $Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist.

Sei D'' die Torsion von D. Dann gilt $D = D' \oplus D''$, D' torsionsfrei und daher $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) = F \oplus D' \subseteq T'$, wo T' die Torsion von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ ist. Wegen $\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}} \subseteq T'$ folgt: $\hat{R} \otimes_R M(R/\tilde{\mathfrak{P}}) \cong F \oplus D' \oplus (T'/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}})$. Da $T'/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist, ist damit der allgemeine Fall auf den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ zurückgeführt.

Damit ist Satz 12 in allen Teilen bewiesen.

Folgerung. *Es sei* $\dim \frac{K}{k} = n$, $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$. *Dann gilt:*

$\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *ist genau dann endlich erzeugbar, wenn*

$$\dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{t}} = \begin{cases} n, & \text{falls } \mathfrak{P} \neq k \\ n-1, & \text{falls } \mathfrak{P} = k \end{cases}$$

ist.

Literatur

[1] Berger, R.: Über den Modul der bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale in einem Körper von Primzahlcharakteristik. J. reine angew. Math. **204**, 188–204 (1960).

[2] —Ausdehnung von Derivationen und Schachtelung der Differente. Math. Z. (im Druck).

[3] Bourbaki, N.: Les structures fondamentales d'analyse, Livre II Chap. III. Paris 1958.

[4] Grothendieck, A.: Éléments de géometrie algébrique I. Publication math. **4** (1960).
[5] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.
[6] Kähler, E.: Algebra und Differentialrechnung, Bericht über die Mathematikertagg Berlin 1953.
[7] Kaplansky, I.: Elementary divisors and modules. Trans. Amer. Math. Soc. **66** 464—491 (1949).
[8] — Infinite Abelian groups. University of Michigan Press. Ann Arbor 1956.
[9] Kunz, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. reine angew Math. **204**, 165—182 (1960).
[10] Roquette, P.: Die Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen. Abh d. math. Seminars d. Univ. Hamburg **23**, 75—113 (1959).
[11] Schmidt, F. K.: Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Z. **41**, 443—450 (1936).
[12] Zariski, O., and P. Samuel: Commutative Algebra, vol. II. Princeton-New York-London-Toronto 1960.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. April 1961)

Endler, O.
Math. Zeitschr. 77, 339—358 (1961)

Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
Otto Endler

In einer Note „Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen", Math. Z. **74**, 81—90 (1960), hat Herr W. Krull die im 5. Buch Euklids dargestellte Proportionenlehre mit der Theorie der archimedischen totalgeordneten Gruppen A in Zusammenhang gebracht. Der Einfachheit halber hat er sich hierbei weitgehend auf den Fall beschränkt, daß die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{E}^*$ aller ordnungserhaltenden und -umkehrenden Endomorphismen von A „r-transitiv" für ein $r \in A$ ist, d.h. daß $A = \mathfrak{E}^* r$ gilt.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen weitergeführt und auf beliebige archimedische totalgeordnete Gruppen verallgemeinert, und es werden insbesondere die folgenden Fragen diskutiert: Läßt sich zu einer vorgegebenen archimedischen totalgeordneten Gruppe A stets eine eudoxische Hülle (d.h. eine kleinste A umfassende eudoxische Gruppe) durch einen algebraischen Prozeß konstruieren?[1]) Wie kann man eine Übersicht über die Multiplikationen gewinnen, die A zu einem archimedischen totalgeordneten Ring machen?

Als wichtigstes Hilfsmittel dient uns die (archimedische totalgeordnete) *Fraktionsgruppe* $\bar{A}$, die aus allen „Fraktionen" a/ϱ besteht, wobei a die Elemente aus A und ϱ die ordnungserhaltenden Endomorphismen von A durchläuft. Diese bildet eine ausgezeichnete eudoxische Hülle von A, falls A *zusammenhängend* ist (d.h. wenn zu $a_1, a_2 \in A$ stets ϱ_1, ϱ_2 mit $\varrho_1 a_1 = \varrho_2 a_2$ existieren), und mit ihrer Hilfe lassen sich die Multiplikationen charakterisieren, die A zu einem archimedischen totalgeordneten Ring (mit oder ohne Einselement) machen. Für *unzusammenhängende* A existiert sicher keine Multiplikation der genannten Art, und $\bar{A}$ ist, von Ausnahmefällen abgesehen, nicht

[1]) A heißt *eudoxisch*, wenn zu jedem positiven Tripel $r, s, t \in A$ die „vierte Proportionale", d.h. ein $u \in A$ mit der Eigenschaft

$$k r > l s \Leftrightarrow k t > l u \qquad (k, l \in \boldsymbol{N})$$

existiert. — Jedes A läßt sich bekanntlich in die additive Gruppe $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen ordnungsisomorph einbetten, und man kann stets eine eudoxische Hülle von A als Untergruppe von $\boldsymbol{R}$ konstruieren [vgl. (3.16)]. Diese Konstruktion kann jedoch nicht als algebraisch angesehen werden, da man $\boldsymbol{R}$ nicht durch einen algebraischen Prozeß aus A gewinnen kann.

eudoxisch. Trotzdem untersuchen wir die Fraktionsgruppe auch in diesem Fall und zeigen insbesondere, daß sie eine symmetrische[2]) Hülle von A bildet, falls A *fraktionsregulär* ist, d.h. wenn die Zusammenhangskomponenten von $\bar{A}$ eineindeutig denen von A entsprechen.

Jede archimedische totalgeordnete Gruppe A ist bereits durch die aus ihren (strikt) positiven Elementen bestehende „archimedische Halbgruppe" H eindeutig festgelegt. Wir dürfen deshalb mit archimedischen Halbgruppen (und entsprechend definierten archimedischen Halbringen und -körpern) statt mit archimedischen totalgeordneten Gruppen (bzw. Ringen und Körpern) arbeiten; die für die ersteren gewonnenen Ergebnisse übertragen sich dann unmittelbar auf die letzteren.

Ein beträchtlicher Teil der für archimedische Halbgruppen gültigen Aussagen läßt sich allgemeiner für die durch gewisse Eigenschaften ihres Endomorphismenhalbringes axiomatisch charakterisierten „A-Halbgruppen" beweisen. Wir beginnen deshalb, in §1, mit einer ausführlichen Diskussion der A-Halbgruppen. Die in §1 gewonnenen Ergebnisse vervollständigen wir dann in §3 für archimedische Halbgruppen; hierbei legen wir besonderen Wert darauf, die für A-Halbgruppen eingeführten Begriffe in die Sprache der Proportionen zu übersetzen. In analoger Weise behandeln wir zunächst in §2 axiomatisch eingeführte „A-Halbringe" und ergänzen die Ausführungen in §4 für archimedische Halbringe.

In §5 sollen die vorhergehenden Betrachtungen durch mehrere Zusätze und Beispiele ergänzt und erläutert werden.

Bezeichnungen: Wir bezeichnen mit $\cdot\boldsymbol{Z}$, $\cdot\boldsymbol{Q}$, $\cdot\boldsymbol{R}$ den archimedischen totalgeordneten Ring bzw. Körper aller ganzen bzw. rationalen bzw. reellen Zahlen, mit $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ seine (archimedische totalgeordnete) Additionsgruppe. Für $u, v, \ldots \in \boldsymbol{R}$ bezeichnet $\boldsymbol{Q}[u, v, \ldots]$ bzw. $\boldsymbol{Q}(u, v, \ldots)$ die Additionsgruppe des Ringes $\cdot\boldsymbol{Q}[u, v, \ldots]$ bzw. des Körpers $\cdot\boldsymbol{Q}(u, v, \ldots)$. — Ist $\boldsymbol{A}$ eine Untergruppe von $\boldsymbol{R}$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}$ ein Unterring von $\cdot\boldsymbol{R}$), so bezeichnen wir mit $\boldsymbol{A}_+$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}_+$) die Halbgruppe (bzw. den Halbring) aller positiven Elemente von $\boldsymbol{A}$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}$). Statt $\boldsymbol{Z}_+$ schreiben wir $\boldsymbol{N}$.

§ 1. A-Halbgruppen

Unter einer *Halbgruppe* verstehen wir eine Menge $P \neq \emptyset$, versehen mit einer (auf ganz P definierten) assoziativen und kommutativen Addition; wir setzen voraus, daß P kein Nullelement besitzt[3]). — Unter einem *Halbring* $\cdot P$ verstehen wir eine Halbgruppe P, versehen mit einer (auf ganz P definierten) assoziativen und hinsichtlich der Addition distributiven Multiplikation $\cdot$. Besitzt $\cdot P$ ein Einselement e (d.h. gilt $e \cdot r = r \cdot e = r$ für alle $r \in P$) und gibt

[2]) Wir nennen A *symmetrisch*, wenn alle ordnungserhaltenden Endomorphismen von A Automorphismen sind. Genau dann ist A eudoxisch, wenn A symmetrisch und zusammenhängend ist (vgl. (3.9)).

[3]) Die folgenden Ausführungen gelten auch für Halbgruppen (-ringe und -körper) mit Nullelement, sofern man dieses an gewissen Stellen stillschweigend von der Betrachtung ausschließt.

es zu jedem $r \in P$ ein Inverses (d.h. ein $r' \in P$ mit $r \cdot r' = r' \cdot r = e$), so nennen wir $\cdot P$ einen *Halbkörper*.

Die Menge aller Endomorphismen einer Halbgruppe P bildet hinsichtlich der üblichen Addition eine Halbgruppe $\mathfrak{P}$. Versehen mit der durch die Vorschrift

$$(\sigma \circ \varrho)\, r = \sigma(\varrho\, r) \qquad (r \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Verknüpfung $\circ$ als Multiplikation, bildet $\mathfrak{P}$ einen Halbring $\circ\mathfrak{P}$ mit dem Einselement ι (die identische Abbildung von P auf sich). Die Menge $\mathfrak{Q}$ aller Automorphismen von P bildet eine (und zwar die größte) Untergruppe der multiplikativen Halbgruppe von $\circ\mathfrak{P}$. Ist $\circ\mathfrak{P}$ ein Halbkörper (d.h. $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$), so nennen wir P *symmetrisch*. Existieren eine Injektion[4]) der Halbgruppe P' in die symmetrische Halbgruppe P und ein Homomorphismus von P in P', so gilt $P \cong P'$, P' ist symmetrisch, und jeder Homomorphismus von P in P' ist eine Bijektion[4]). Für jedes $r \in P$ wird durch die Vorschrift

$$\Theta_r\, \varrho = \varrho\, r \qquad (\varrho \in \mathfrak{P})$$

ein Homomorphismus Θ_r von $\mathfrak{P}$ in P definiert. Ist Θ_r eine Bijektion, so nennen wir r *primitiv für* P.

Eine Injektion φ von P in P' soll *regulär* heißen, wenn ein (notwendig injektiver) Homomorphismus $\mathfrak{f}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ mit $\varphi \circ \sigma = (\mathfrak{f}\sigma) \circ \varphi$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ existiert. Insbesondere ist jede Bijektion φ von P auf P' regulär, und das zugehörige $\mathfrak{f}$ ist ebenfalls eine Bijektion.

Wir interessieren uns besonders für Halbgruppen P, die den folgenden Bedingungen genügen:

1a) $\circ\mathfrak{P}$ *ist kommutativ*;

1b) *alle* $\varrho \in \mathfrak{P}$ *sind injektiv*;

1c) *für jedes* $r \in P$ *ist* Θ_r *injektiv*.

Eine Halbgruppe dieser Art wollen wir kurz eine *A-Halbgruppe* nennen. Existiert eine reguläre Injektion φ von einer Halbgruppe P' in eine A-Halbgruppe P, so ist auch P' eine A-Halbgruppe, und die zu φ gehörige Injektion $\mathfrak{f}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ ist eindeutig bestimmt.

Eine Halbgruppe P heißt *zusammenhängend*, wenn für alle $r, s \in P$ stets ϱ, $\sigma \in \mathfrak{P}$ mit $\varrho r = \sigma s$ existieren. Ist P zusammenhängend und symmetrisch, so ist jedes $r \in P$ primitiv für P. Andererseits gilt für jede A-Halbgruppe P: Existiert ein für P primitives $r \in P$, so ist P zusammenhängend; sind alle $r \in P$ primitiv für P, so ist P symmetrisch.

In der A-Halbgruppe P wird durch die Vorschrift

$$r \underset{P}{\sim} s \Leftrightarrow \varrho\, r = \sigma\, s \quad \textit{für geeignete } \varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$$

[4]) Unter einer *Injektion von P in P'* bzw. einer *Bijektion von P auf P'* verstehen wir einen injektiven, d.h. eineindeutigen, Homomorphismus von P in P' bzw. einen Isomorphismus von P auf P'. Ist φ eine Injektion von P in P', so bezeichnen wir mit φ^{-1} die zu φ inverse Bijektion von φP auf P.

eine Äquivalenzrelation $\widetilde{\mathfrak{P}}$ definiert; die $\widetilde{\mathfrak{P}}$-Äquivalenzklassen nennen wir die *Zusammenhangskomponenten* von P. Jede Zusammenhangskomponente P_μ von P ist eine zusammenhängende Halbgruppe, und die Abbildung i_μ, die jedem $\varrho \in \mathfrak{P}$ seine Beschränkung auf P_μ zuordnet, ist eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}_\mu$. Die identische Injektion von P_μ in P ist genau dann regulär, wenn i_μ eine Bijektion ist. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn P symmetrisch ist und P_μ der Bedingung 1 c) genügt. Genau dann ist P zusammenhängend, wenn P nur eine Zusammenhangskomponente (nämlich P selbst) besitzt. Ist φ eine reguläre Injektion von einer zusammenhängenden Halbgruppe P' in eine A-Halbgruppe P, so ist $\varphi P'$ in einer Zusammenhangskomponente von P enthalten (vgl. aber §5, Beispiel 3).

Es sei P eine A-Halbgruppe. In der Paarmenge $P \times \mathfrak{P}$ wird durch die Vorschrift

$$(r, \varrho) \overset{\approx}{\mathfrak{P}} (s, \sigma) \Leftrightarrow \sigma r = \varrho s \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

eine Äquivalenzrelation $\overset{\approx}{\mathfrak{P}}$ definiert; die durch (r, ϱ) bestimmte $\overset{\approx}{\mathfrak{P}}$-Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit r/ϱ. Die Menge aller r/ϱ $(r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P})$ bildet hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$r/\varrho + s/\sigma = (\sigma r + \varrho s)/(\varrho \circ \sigma) \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Addition eine Halbgruppe $\overline{P}$, die wir die *Fraktionshalbgruppe von* P nennen. — Durch die Vorschrift

$$\eta r = r/\iota \quad (r \in P) \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{h}\sigma)(r/\varrho) = (\sigma r)/\varrho \quad (r \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

werden eine Injektion η von P in $\overline{P}$ und eine Injektion $\mathfrak{h}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\overline{\mathfrak{P}}$ definiert; wegen $\eta \circ \sigma = (\mathfrak{h}\sigma) \circ \eta$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ ist η eine reguläre Injektion. Für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{h}\sigma \in \overline{\mathfrak{Q}}$, und die Menge $\{(\mathfrak{h}\varrho) \circ \mathfrak{h}\sigma \mid \varrho, \sigma \in \mathfrak{P}\}$, die wir im folgenden kurz mit $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\perp} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P}$ bezeichnen, bildet eine kommutative Untergruppe von $\overline{\mathfrak{Q}}$. Insbesondere ist η genau dann eine Bijektion, wenn $\mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}}$ gilt, und dies trifft genau dann zu, wenn P symmetrisch ist. — Man beweist mühelos den folgenden Einbettungssatz:

(1.1) SATZ. *Es seien P, P' A-Halbgruppen, φ sei eine reguläre Injektion von P in P' und $\mathfrak{f}$ die zugehörige Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Dann wird durch die Vorschrift*

$$\overline{\varphi}(r/\varrho) = \varphi r/\mathfrak{f}\varrho \qquad (r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P})$$

eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{P}$ in $\overline{P'}$ mit der Eigenschaft $\eta' \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \eta$ definiert.

Ist P' symmetrisch, so ist $\breve{\varphi} = \eta'^{\perp} \circ \overline{\varphi}$ eine der Gleichung $\varphi = \breve{\varphi} \circ \eta$ genügende Injektion von $\overline{P}$ in P'.

Im allgemeinen ist $\overline{P}$ selbst nicht symmetrisch, und die durch φ induzierten Injektionen $\overline{\varphi}, \breve{\varphi}$ brauchen nicht regulär zu sein (vgl. §5, Beispiele 8 bis 10). Für den Fall daß P *fraktionsregulär* ist, d.h. daß $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\perp} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}}$ gilt, erhalten wir jedoch die folgende schärfere Aussage:

(1.2) KOROLLAR. *Ist die A-Halbgruppe P fraktionsregulär, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische A-Halbgruppe, und die in* (1.1) *betrachteten Injektionen $\overline{\varphi}, \overline{\varphi}$ sind regulär.*

BEWEIS. Wegen $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})\circ\mathfrak{h}\mathfrak{P}=\overline{\mathfrak{Q}}=\overline{\mathfrak{P}}$ ist $\overline{P}$ symmetrisch und genügt den Bedingungen 1a) und 1b). Es sei $\bar{s}=s/\sigma\in\overline{P}$, und es möge $\bar{\sigma}_1\bar{s}=\bar{\sigma}_2\bar{s}$ für $\bar{\sigma}_i=(\mathfrak{h}\tau_i)^{\smile}\circ\mathfrak{h}\varrho_i\in\overline{\mathfrak{P}}$ $(i=1,2)$ gelten. Dann ist $\eta((\tau_2\circ\varrho_1)s)=\eta((\tau_1\circ\varrho_2)s)$ und somit $\tau_2\circ\varrho_1=\tau_1\circ\varrho_2$, also $\bar{\sigma}_1=\bar{\sigma}_2$. Also ist $\overline{P}$ eine A-Halbgruppe. — Die durch $\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'\circ\mathfrak{f}$ bestimmte Injektion $\bar{\mathfrak{f}}$ von $\circ(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ in $\circ(\mathfrak{h}'\mathfrak{P}')$ läßt sich wegen $\overline{\mathfrak{P}}=(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\smile}\circ\mathfrak{h}\mathfrak{P}$ zu einer (ebenso bezeichneten) Injektion von $\circ\overline{\mathfrak{P}}$ in $\circ\overline{\mathfrak{P}'}$ fortsetzen. Aus $\varphi\circ\varrho=(\mathfrak{f}\varrho)\circ\varphi$ $(\varrho\in\mathfrak{P})$ folgt $\overline{\varphi}\circ\bar{\varrho}=(\bar{\mathfrak{f}}\bar{\varrho})\circ\overline{\varphi}$, $(\bar{\mathfrak{f}}\bar{\varrho}^{-})\circ\overline{\varphi}=\overline{\varphi}\circ\bar{\varrho}^{\smile}$ und somit $\overline{\varphi}\circ(\bar{\sigma}^{-}\circ\bar{\varrho})=\bar{\mathfrak{f}}(\bar{\sigma}^{-}\circ\bar{\varrho})\circ\overline{\varphi}$ für alle $\bar{\varrho},\bar{\sigma}\in\mathfrak{h}\mathfrak{P}$, also ist $\overline{\varphi}$ regulär. — Ist P' symmetrisch, so ist η' eine Bijektion, und mit $\overline{\varphi}$ ist auch $\overline{\varphi}=\eta'^{\smile}\circ\overline{\varphi}$ regulär.

Es sei $P=\bigcup_{\mu\in\mathsf{M}}P_\mu$ die Zerlegung von P in (paarweise elementefremde) Zusammenhangskomponenten P_μ. Für jedes $\mu\in\mathsf{M}$ ist $\overline{P}_{(\mu)}=\{r/\varrho\,|\,r\in P_\mu;\ \varrho\in\mathfrak{P}\}$ eine ηP_μ umfassende zusammenhängende Unterhalbgruppe von $\overline{P}$, und $\overline{P}_{(\mu)}$ ist in einer Zusammenhangskomponente $\overline{P}_{\bar{\mu}}$ von $\overline{P}$ enthalten. Ersichtlich ist $\overline{P}=\bigcup_{\mu\in\mathsf{M}}\overline{P}_{(\mu)}$, ferner $\overline{P}_{(\mu)}\cap\overline{P}_{(\mu')}=\emptyset$ für $\mu\neq\mu'$.

(1.3) LEMMA. *Es sei P eine A-Halbgruppe, und $\overline{P}$ genüge der Bedingung* 1c). *Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Für jedes $\bar{\tau}\in\overline{\mathfrak{P}}$ existiert ein $\mu\in\mathsf{M}$ mit $\bar{\tau}\,\overline{P}_{(\mu)}\cap\overline{P}_{(\mu)}\neq\emptyset$;

β) P ist fraktionsregulär;

γ) aus $\eta r_1\underset{P}{\sim}\eta r_2$ folgt $r_1\underset{P}{\sim}r_2$ $(r_1,r_2\in P)$.

In diesem Falle sind die $\overline{P}_{(\mu)}$ $(\mu\in\mathsf{M})$ die sämtlichen Zusammenhangskomponenten von $\overline{P}$.

BEWEIS. $\alpha)\Rightarrow\beta)$: Für jedes $\bar{\tau}\in\overline{\mathfrak{P}}$ existieren $\mu\in\mathsf{M}$, $s_i\in P_\mu$, $\sigma_i\in\mathfrak{P}$ $(i=1,2)$ mit $\bar{\tau}(s_1/\sigma_1)=s_2/\sigma_2$, ferner $\varrho_1,\varrho_2\in\mathfrak{P}$ mit $\varrho_1 s_1=\varrho_2 s_2$. Für $\bar{\tau}_i=\mathfrak{h}(\varrho_i\circ\sigma_i)$ $(i=1,2)$ gilt daher $\bar{\tau}_1(s_1/\sigma_1)=\eta(\varrho_1 s_1)=\eta(\varrho_2 s_2)=\bar{\tau}_2(s_2/\sigma_2)$, also $(\bar{\tau}_2^{\smile}\circ\bar{\tau}_1)(s_1/\sigma_1)=s_2/\sigma_2$, und wegen 1c) ist somit $\bar{\tau}=\bar{\tau}_2^{-}\circ\bar{\tau}_1\in(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{-}\circ\mathfrak{h}\mathfrak{P}$. Also ist P fraktionsregulär. — $\beta)\Rightarrow\gamma)$: Ist $\bar{\tau}_1(\eta r_1)=\bar{\tau}_2(\eta r_2)$ für geeignete $\bar{\tau}_i=(\mathfrak{h}\varrho_i)^{\smile}\circ\mathfrak{h}\sigma_i\in\overline{\mathfrak{P}}$ $(i=1,2)$, so gilt $\eta((\varrho_1\circ\sigma_2)r_2)=(\mathfrak{h}(\varrho_1\circ\varrho_2)\circ\bar{\tau}_2)(\eta r_2)=(\mathfrak{h}(\varrho_2\circ\varrho_1)\circ\bar{\tau}_1)(\eta r_1)=\eta((\varrho_2\circ\sigma_1)r_1)$ und somit $r_1\underset{P}{\sim}r_2$. — $\gamma)\Rightarrow\alpha)$: Aus $r_i\in P_{\mu_i}$ $(i=1,2)$, $\eta r_1\underset{P}{\sim}\eta r_2$ folgt $r_1\underset{P}{\sim}r_2$, also $\mu_1=\mu_2$. Daher gilt die letzte Behauptung des Lemmas und erst recht $\alpha)$.

Wir bemerken noch: Ist P nicht fraktionsregulär, und genügt $\overline{P}$ der Bedingung 1c), so gibt es ein $\bar{\tau}\in\overline{\mathfrak{P}}$ derart, daß $\bar{\tau}\,\overline{P}_{(\mu)}\cap\overline{P}_{(\mu)}=\emptyset$ für alle $\mu\in\mathsf{M}$ gilt. In diesem Falle ist also jedes $\overline{P}_{(\mu)}$ in einer Zusammenhangskomponente $\overline{P}_{\bar{\mu}}$ von $\overline{P}$ *echt* enthalten. — Aus (1.2) und (1.3) folgt insbesondere:

(1.4) KOROLLAR. *Für jede A-Halbgruppe P sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) P ist fraktionsregulär, und $\overline{P}$ ist zusammenhängend;

β) P ist zusammenhängend, und $\overline{P}$ genügt der Bedingung 1c).

§ 2. A-Halbringe

Ist $\cdot P$ ein Halbring mit der Additionshalbgruppe P, so ist die durch di Vorschrift

$$(\Xi r)\, s = r \cdot s \qquad (r, s \in P)$$

definierte Abbildung Ξ ein Homomorphismus von $\cdot P$ in $\circ\mathfrak{P}$. Ist $\cdot P$ kom mutativ, so ist P zusammenhängend, und es gilt $\Theta_r \circ \Xi = \Xi r$ für jedes $r \in P$

Das Element $r \in \cdot P$ heißt *regulär*, wenn aus $s \cdot r = t \cdot r$ stets $s = t$ folg $(s, t \in \cdot P)$. Der Halbring $\cdot P$ heißt regulär, wenn er nur aus regulären Ele menten besteht. Insbesondere ist jeder Halbkörper regulär. Besitzt $\cdot P$ ei reguläres Element, so ist Ξ injektiv.

Es sei $\cdot P$ ein Halbring, dessen Additionshalbgruppe P den Bedingungen 1 a und 1 b) genügt. Dann gilt $\tau(r \cdot s) = r \cdot (\tau s)$ $(r, s \in P;\ \tau \in \mathfrak{P})$, und die folgender Bedingungen sind äquivalent: $\alpha)$ *$\cdot P$ besitzt ein reguläres Element*; $\beta)$ *Ξ is injektiv*; $\gamma)$ *$\cdot P$ ist kommutativ*; $\delta)$ *$\cdot P$ ist regulär*. Gelten diese Bedingungen so ist P eine A-Halbgruppe (denn aus $\sigma r = \tau r$ folgt $(\sigma s) \cdot r = s \cdot (\sigma r) = s \cdot (\tau r) =$ $(\tau s) \cdot r$ und somit $\sigma s = \tau s$ für alle $s \in P$, also $\sigma = \tau$), und wir nennen in diesem Falle $\cdot P$ einen *A-Halbring*; falls $\cdot P$ ein Halbkörper ist, nennen wir $\cdot P$ einen *A-Halbkörper*. Die A-Halbringe mit Einselement lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

(2.1) LEMMA. *Für jeden Halbring $\cdot P$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$\alpha)$ $\cdot P$ ist ein regulärer kommutativer Halbring mit Einselement e, und Θ_e ist injektiv;

$\beta)$ $\cdot P$ ist ein A-Halbring, und es ist $\iota \in \Xi P$.

In diesem Falle sind Ξ, Θ_e zueinander inverse Bijektionen von $\cdot P$ auf $\circ\mathfrak{P}$ bzw. von $\circ\mathfrak{P}$ auf $\cdot P$.

BEWEIS. $\beta) \Rightarrow \alpha)$ ist trivial. — $\alpha) \Rightarrow \beta)$: Da Θ_e injektiv ist und $\Theta_e \circ \Xi = \Xi e = \iota$ gilt, sind Θ_e, Ξ zueinander invers und daher bijektiv; insbesonder gilt $\iota \in \Xi P$. Aus der Kommutativität von $\cdot P$ folgt die von $\circ\mathfrak{P}$. Jedes $\varrho \in \mathfrak{P}$ ist injektiv; in der Tat, es ist $\varrho = \Xi r$ für ein $r \in P$, und aus $\varrho s = \varrho t$ folg $r \cdot s = r \cdot t$, $s = t$ wegen der Regularität und Kommutativität von $\cdot P$. Als ist $\cdot P$ ein A-Halbring.

(2.2) LEMMA. *Es seien $\cdot P, \cdot P'$ A-Halbringe, φ sei eine reguläre Injektion von P in P', und $\mathfrak{f}$ sei die zu φ gehörige Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$\alpha)$ φ ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$;

$\beta)$ es gilt $\mathfrak{f} \circ \Xi = \Xi' \circ \varphi$;

Besitzt $\cdot P$ ein Einselement e, so sind diese Bedingungen auch gleichwertig mit

$\gamma)$ φe ist Einselement von $\cdot P'$.

BEWEIS. $\alpha) \Leftrightarrow \beta)$ folgt wegen 1 c) aus den Gleichungssystemen $\varphi r \cdot \varphi s =$ $\big(\Xi'(\varphi r)\big)(\varphi s)$, $\varphi(r \cdot s) = (\varphi \circ \Xi r)\, s = \big(\mathfrak{f}(\Xi r)\big)(\varphi s)$ $(r, s \in P)$. — Angenommen, $\cdot P$ besitze das Einselement e. Dann folgt $\gamma) \Rightarrow \beta)$ aus $\varphi \circ \Theta_e = \Theta'_{\varphi e} \circ \mathfrak{f}$ und (2.1), während $\alpha) \Rightarrow \gamma)$ aus der Regularität von $\cdot P'$ folgt.

Aus Lemma (2.1) ergibt sich, daß eine vorgebene A-Halbgruppe P höchstens dann (durch Einführung einer geeigneten Multiplikation) zu einem A-Halbring mit Einselement gemacht werden kann, wenn ein für P primitives Element existiert. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; ist nämlich $r \in P$ primitiv für P, so läßt sich die Multiplikation von $\circ\mathfrak{P}$ vermöge der Bijektion Θ_r auf P übertragen. Die so erhaltene Multiplikation nennen wir die r-Multiplikation von P und bezeichnen sie mit $\overset{r}{\cdot}$. Es gilt also der

(2.3) Satz. *Die Multiplikationen, die die A-Halbgruppe P zu einem A-Halbring mit Einselement machen, entsprechen eineindeutig den für P primitiven Elementen $r \in P$. Hierbei ist r das Einselement von $\overset{r}{\cdot}P$, und Θ_r ist eine Bijektion von $\circ\mathfrak{P}$ auf $\overset{r}{\cdot}P$.*

Auf Grund einer Bemerkung in §1 folgt daraus unmittelbar das

(2.4) Korollar. *Die A-Halbgruppe P läßt sich genau dann zu einem A-Halbkörper machen, wenn P symmetrisch und zusammenhängend ist. In diesem Falle ist $\overset{r}{\cdot}P$, für jedes $r \in P$, ein zu $\circ\mathfrak{P}$ isomorpher Halbkörper.*

Ist $\cdot P$ ein A-Halbring, so bildet die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ von P hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$r/\varrho \cdot s/\sigma = (r \cdot s)/(\varrho \circ \sigma) \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Multiplikation einen kommutativen regulären Halbring $\overline{\cdot P}$ mit dem Einselement $\bar{e} = r/\Xi r$ (unabhängig von der Wahl von $r \in P$), und η ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\overline{\cdot P}$. Der Halbring $\overline{\cdot P}$ ist sogar ein Halbkörper, denn durch die Vorschrift

$$\tilde{\eta}\left(\frac{r}{s}\right) = r/\Xi s \qquad (r, s \in P)$$

wird eine Bijektion $\tilde{\eta}$ von dem Quotientenhalbkörper $\frac{\cdot P}{\cdot P}$ von $\cdot P$ auf $\overline{\cdot P}$ definiert. Aus der letztgenannten Tatsache folgert man mühelos: Sind $\cdot P$, $\cdot P'$ A-Halbringe und ist φ eine (nicht notwendig reguläre) Injektion von P in P', so ist φ genau dann eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$, wenn eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{\cdot P}$ in $\overline{\cdot P'}$ mit $\overline{\varphi} \circ \eta = \eta' \circ \varphi$ existiert.

Nach (2.1) ist $\overline{\cdot P}$ genau dann ein A-Halbkörper, wenn $\overline{\Theta}_{\bar{e}}$ injektiv ist; wegen (1.2) und (1.4) trifft dies genau dann zu, wenn P fraktionsregulär ist.

Wir wollen eine Übersicht über die Multiplikationen gewinnen, die eine vorgegebene fraktionsreguläre A-Halbgruppe P zu einem A-Halbring (mit oder ohne Einselement) machen. Wir nennen $\bar{r} \in \overline{P}$ *quasiprimitiv für* P, wenn $\eta P \subseteqq \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ gilt; für $\bar{r} = r/\varrho$ ist diese Bedingung gleichwertig mit $\varrho P \subseteqq \Theta_r \mathfrak{P}$; insbesondere ist ηr genau dann quasiprimitiv für P, wenn r primitiv für P ist ($r \in P$). Ist $\cdot P$ ein A-Halbring, so ist $\overline{\cdot P}$ ein A-Halbkörper, dessen Einselement $\bar{e}$ quasiprimitiv für P ist (denn für alle $s \in P$ gilt $\eta s = \eta s \cdot \bar{e} = (\overline{\Xi}(\eta s))\bar{e} = (\mathfrak{h}(\Xi s))\bar{e} \in \overline{\Theta}_{\bar{e}}(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ wegen (2.2)). Ist andererseits $\bar{r} \in \overline{P}$ quasiprimitiv für P, so ist $\bar{r}$ primitiv für $\overline{P}$, und ηP bildet, versehen mit der $\bar{r}$-Multiplikation,

einen Unterhalbring $\overset{\bar{r}}{\cdot}(\eta P)$ von $\overset{\bar{r}}{\cdot}\overline{P}$ (denn aus $\eta s_i = \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\sigma_i)$ $(i=1,2)$ fol $\eta s_1 \overset{\bar{r}}{\cdot} \eta s_2 = \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\sigma_1 \circ \mathfrak{h}\sigma_2) = (\mathfrak{h}\sigma_1)(\eta s_2) = \eta(\sigma_1 s_2) \in \eta P$). Mit Hilfe der Bijektion η von ηP auf P läßt sich die Multiplikation von $\overset{\bar{r}}{\cdot}(\eta P)$ auf P übertragen; d so erhaltene Multiplikation nennen wir die *$\bar{r}$-Multiplikation von P* und b zeichnen sie ebenfalls mit $\overset{\bar{r}}{\cdot}$. Es gilt also analog zu (2.3) der

(2.5) SATZ. *Die Multiplikationen, die die fraktionsreguläre A-Halbgruppe P einem A-Halbring machen, entsprechen eineindeutig den für P quasiprimitiv Elementen $\bar{r} \in \overline{P}$. Für jedes solche $\bar{r}$ ist η eine Injektion von $\overset{\bar{r}}{\cdot}P$ in den A-Ha körper $\overset{\overline{\bar{r}}}{\cdot}P = \overset{\bar{r}}{\cdot}\overline{P}$.*

Genau dann besitzt $\overset{\bar{r}}{\cdot}P$ ein Einselement r, wenn $\bar{r} = \eta r \in \eta P$ ist; in diese Falle ist $\overset{\bar{r}}{\cdot}P = \overset{r}{\cdot}P$.

Aus (2.5) folgt insbesondere, daß sich eine symmetrische A-Halbgruppe sicher nicht zu einem A-Halbring *ohne* Einselement machen läßt (denn η eine Bijektion). Dagegen läßt sich die Additionshalbgruppe P eines A-Hal ringes $\cdot P$ mit Einselement e, sofern sie fraktionsregulär und nicht symmetris ist, stets auch zu einem A-Halbring ohne Einselement machen (denn f $\varrho \in \mathfrak{P}$, $\varrho \notin \mathfrak{Q}$ ist $e/\varrho \in \overline{P}$ quasiprimitiv für P, aber $e/\varrho \notin \eta P$).

In §5 werden wir von dem folgenden Lemma Gebrauch machen:

(2.6) LEMMA. *Es sei φ eine reguläre Injektion von der Halbgruppe P in Additionshalbgruppe P' des A-Halbringes $\cdot P'$. Dann folgt aus $\varrho_1 r_2 = \varrho_2 r_1$ st*

$$\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot (\varphi r_2)^2 = \varphi(\varrho_2 r_2) \cdot (\varphi r_1)^2 \qquad (r_1, r_2 \in P;\ \varrho_1, \varrho_2 \in \mathfrak{P}).$$

Insbesondere gilt

$$(\varphi(\varrho r))^2 = \varphi(\varrho^2 r) \cdot \varphi r \qquad (r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P}).$$

BEWEIS. Es gilt $\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot \varphi r_2 = \big((\mathfrak{f}\varrho_1)(\varphi r_1)\big) \cdot \varphi r_2 = \varphi r_1 \cdot \big((\mathfrak{f}\varrho_1)(\varphi r_2)\big)$ $\varphi r_1 \cdot \varphi(\varrho_1 r_2)$, ebenso $\varphi(\varrho_2 r_2) \cdot \varphi r_1 = \varphi r_2 \cdot \varphi(\varrho_2 r_1)$, wobei $\mathfrak{f}$ die zu φ gehörn Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ bezeichnet. Aus $\varrho_1 r_2 = \varrho_2 r_1$ folgt daher $\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot (\varphi r_2)$ $\varphi(\varrho_2 r_2) \cdot (\varphi r_1)^2$. — Für $\varrho_1 = \iota$, $\varrho_2 = \varrho$, $r_1 = r$, $r_2 = \varrho r$ ergibt sich $\varphi r \cdot \big(\varphi(\varrho r)\big)$ $\varphi(\varrho^2 r) \cdot (\varphi r)^2$ und somit $\big(\varphi(\varrho r)\big)^2 = \varphi(\varrho^2 r) \cdot \varphi r$.

§ 3. Archimedische Halbgruppen

Es sei $A \neq \{0\}$ eine archimedische totalgeordnete (additiv geschriebene Gruppe. Die Menge aller (strikt) positiven Elemente von A bildet eine Ha gruppe P im Sinne von §1; P ist *regulär*, (d.h. aus $s+r=t+r$ folgt st $s=t$ $(r, s, t \in P)$) und genügt den folgenden Bedingungen:

3a) *Für jedes Paar $r, s \in P$, $r \neq s$, gilt $r > s$ oder $s > r$;*

3b) *für jedes Paar $r, s \in P$ gibt es ein $n \in \boldsymbol{N}$ mit $nr > s$ (Archimedisc Axiom);*

3c) *es gilt $r > s$ genau dann, wenn $r = s + t$ für ein $t \in P$ ist $(r, s \in P)$.*

[5]) Bekanntlich ist jede archimedische totalgeordnete Gruppe abelsch. Vgl. CARTAN, Un théorème sur les groupes ordonnés. Bull. des Sciences mathém. 2e série **63**, 201 — (1939).

Ist andererseits P eine den Bedingungen 3a) und 3b) genügende reguläre Halbgruppe, wobei das Zeichen $>$ durch 3c) erklärt ist, so ist P die Unterhalbgruppe aller positiven Elemente einer eindeutig bestimmten archimedischen totalgeordneten Gruppe $A \neq \{0\}$, und die Relation $>$ wird durch die strikte Totalordnung von A induziert (d.h., für $r, s \in P$ ist $r > s$ gleichbedeutend mit $r \geqq s$, $r \neq s$). Wir nennen in diesem Falle P eine *archimedische Halbgruppe*.

Ist U eine nicht-leere Untermenge einer archimedischen Halbgruppe P, so bildet die Menge aller $r \in P$, die sich in der Form $r = \Sigma_{u \in U} n_u u$ (mit $n_u \in \mathbf{Z}$; $n_u = 0$ für fast alle $u \in U$) schreiben lassen, die kleinste U umfassende archimedische Unterhalbgruppe von P; wir nennen sie *die durch U erzeugte archimedische Halbgruppe*.

Ist $\cdot A \neq \{0\}$ ein archimedischer totalgeordneter Ring (bzw. Körper), so bildet die Menge aller positiven Elemente von $\cdot A$ einen Halbring (bzw. -körper) $\cdot P$, dessen Additionshalbgruppe archimedisch ist. Andererseits ist jeder Halbring (bzw. -körper) $\cdot P$ mit archimedischer Additionshalbgruppe der Unterhalbring (bzw. -körper) aller positiven Elemente eines eindeutig bestimmten archimedischen totalgeordneten Ringes (bzw. Körpers) $\cdot A \neq \{0\}$; wir nennen daher $\cdot P$ einen *archimedischen Halbring* (bzw. *-körper*). Ein eventuell vorhandenes Einselement von $\cdot A$ ist zugleich Einselement von $\cdot P$ und umgekehrt.

Genügt die Halbgruppe P der Bedingung 3a), wobei wieder $>$ durch 3c) erklärt ist, und ist φ ein Homomorphismus von P in eine archimedische Halbgruppe P', so gilt

$$r > s \Leftrightarrow \varphi r > \varphi s \qquad (r, s \in P),$$

φ ist eine Injektion, und P ist ebenfalls archimedisch.

Die Injektionen von P in P' ergeben bei natürlicher Fortsetzung gerade die sämtlichen ordnungserhaltenden (d.h. der Bedingung $a > b \Rightarrow \psi a > \psi b$ $(a, b \in A)$ genügenden[6]) Homomorphismen ψ von A in A', wobei A bzw. A' die zu P bzw. P' gehörige archimedische totalgeordnete Gruppe bezeichnet. In gleicher Weise entsprechen die Injektionen von $\cdot P$ in $\cdot P'$ (archimedische Halbringe bzw. -körper) den ordnungserhaltenden Homomorphismen von $\cdot A$ in $\cdot A'$ (zugehörige archimedische totalgeordnete Ringe bzw. Körper).

Diese Bemerkungen gestatten es, im folgenden ausschließlich mit archimedischen Halbgruppen, -ringen und -körpern zu arbeiten. Wir werden sehen, daß es sich um A-Halbgruppen bzw. A-Halbringe bzw. A-Halbkörper handelt, so daß wir die Ausführungen von §§ 1 bis 2 darauf anwenden können.

Wir haben bereits erwähnt, daß in Verschärfung von 1b) jeder Homomorphismus zwischen archimedischen Halbgruppen P, P' injektiv ist. Wir werden zeigen, daß in Verschärfung von 1c) für je zwei verschiedene Injektionen φ_1, φ_2 von P in P' stets $\varphi_1 r \neq \varphi_2 r$ für alle $r \in P$ gilt (vgl. (3.3)).

---

[6]) Wegen des Archimedischen Axioms ist diese Bedingung gleichwertig mit:

$$\psi A \neq \{0\}; \qquad a \geqq b \Rightarrow \psi a \geqq \psi b \qquad (a, b \in A).$$

Zu diesem Zwecke bringen wir die Injektionen mit der (im Sinne des 5. Buches von Euklids Elementen definierten) Proportionalitätsrelation in Zusammenhang.

Es seien $P, P', \ldots$ beliebige archimedische Halbgruppen. Für Elementepaare $(r, s) \in P \times P$, $(r', s') \in P' \times P', \ldots$ schreiben wir $(r, s) \asymp (r', s')$ genau dann, wenn

$$kr > ls \Leftrightarrow kr' > ls' \quad (k, l \in \boldsymbol{N})$$

gilt. Man beweist mühelos die Gültigkeit der folgenden Implikationen:

(3.1) a) $(r, s) \asymp (r', s')$, $(r, s) \asymp (r'', s'') \Rightarrow (r', s') \asymp (r'', s'')$;

b) $(r, s_i) \asymp (r', s_i')$ $(i = 1, 2) \Rightarrow (r, s_1 + s_2) \asymp (r', s_1' + s_2')$;

c) $(r, s) \asymp (r', s')$, $(s, t) \asymp (s', t') \Rightarrow (r, t) \asymp (r', t')$;

d) $(r_1, s_1) \asymp (r_2, s_2) \Rightarrow (r_1, r_2) \asymp (s_1, s_2)$;

e) $(r, s_1) \asymp (r, s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$.

Aus (3.1 a, b, e) ergibt sich die folgende Charakterisierung der Injektionen:

(3.2) LEMMA. *Für jede Abbildung φ von P in P' sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Es gibt ein $r \in P$ mit $(r, s) \asymp (\varphi r, \varphi s)$ $(s \in P)$;

β) φ ist eine Injektion von P in P';

γ) es gelten $\varphi(ks) = k(\varphi s)$ $(s \in P;\ k \in \boldsymbol{N})$ und $r > s \Rightarrow \varphi r > \varphi s$ $(r, s \in P)$[7]*.*

In diesem Falle gilt α) sogar für jedes $r \in P$.

Daraus folgt weiter, daß jede Injektion φ von P in P' durch Angabe eines einzigen Urbild-Bild-Paares eindeutig bestimmt ist; genauer:

(3.3) KOROLLAR. *Für jedes Paar $r \in P$, $r' \in P'$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Zu jedem $s \in P$ existiert ein $s' \in P'$ mit $(r, s) \asymp (r', s')$;

β) es existiert eine Injektion φ von P in P' mit $\varphi r = r'$.

In diesem Falle ist φ eindeutig bestimmt, nämlich $\varphi s = s'$ $(s \in P)$.

Aus (3.3) folgt insbesondere die bekannte Tatsache, daß zu jeder archimedischen Halbgruppe P und jedem $r \in P$ genau eine Injektion φ von P in $\boldsymbol{R}_+$ mit $\varphi r = 1$ existiert $\left(\text{denn es gilt } (r, s) \asymp \left(1, \inf \left\{ \frac{k}{l} \mid k, l \in \boldsymbol{N};\ ls \leqq kr \right\}\right) \text{ für alle } s \in P\right)$.

Die Beschränkung der Relation $\asymp$ auf $P \times P$ ist eine Äquivalenzrelation von $P \times P$. Die durch $(r, s) \in P \times P$ bestimmte Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $r :_P s$ und nennen sie eine *Proportion von P*. Mit $P : P$ bezeichnen wir die Menge aller Proportionen von P.

Wir schreiben $P \tilde{\leqq} P'$, falls eine Injektion von P in P' existiert. (Man beachte, daß für nicht-symmetrische P, P' aus $P \tilde{\leqq} P' \tilde{\leqq} P$ im allgemeinen nicht $P \cong P'$ folgt; vgl. §5, Beispiel 6.) — Aus (3.2) folgt unmittelbar: Im

[7]) Auf die Tatsache, daß die Bedingung γ) bereits die Homomorphieeigenschaft von φ impliziert, hat mich Herr W. KRULL aufmerksam gemacht.

Falle $P \tilde{\subseteqq} P'$ wird durch die Vorschrift

$$\Pi_{P,P'} r:_P s = r':_{P'} s' \Leftrightarrow (r,s) \asymp (r',s') \qquad (r,s \in P;\ r',s' \in P')$$

eine eineindeutige Abbildung $\Pi_{P,P'}$ von $P:P$ in $P':P'$ definiert, und für jede Injektion φ von P in P' gilt

$$\Pi_{P,P'} r:_P s = \varphi r:_{P'} \varphi s \qquad (r,s \in P).$$

Man beachte, daß $\Pi_{P,P'}$ bijektiv sein kann, ohne daß $P \cong P'$ gilt (z.B. ist $\Pi_{\mathbf{N},\mathbf{Q}_+}$ bijektiv).

Die Proportion $r:_P s$ heißt *regulär*, wenn zu jedem $t \in P$ ein $u \in P$ mit $r:_P s = t:_P u$ existiert. Die Menge aller regulären Proportionen von P bezeichnen wir mit $R(P:P)$. Gilt $R(P:P) = P:P$, so heißt P *eudoxisch*. Insbesondere ist die Additionshalbgruppe P jedes archimedischen Halbkörpers $\cdot P$ eudoxisch (denn es gilt $r:_P s = t:_P (s \cdot t \cdot r^{-1})$ für alle $r, s, t \in P$). Für eudoxisches P' folgt aus (3.3) unmittelbar:

(3.4) Korollar. *Es sei $P \tilde{\subseteqq} P'$, und P' sei eudoxisch. Dann existiert zu jedem Paar $r \in P$, $r' \in P'$ genau eine Injektion φ von P in P' mit $\varphi r = r'$.*

Die Endomorphismen einer archimedischen Halbgruppe P entsprechen kanonisch eineindeutig den regulären Proportionen von P. In der Tat, aus (3.1 d), (3.2) und (3.3) folgt, daß durch die Vorschrift

$$\Omega_P \sigma = r:_P \sigma r \qquad (\sigma \in \mathfrak{P})$$

eine von der Wahl von $r \in P$ unabhängige eineindeutige Abbildung Ω_P von $\mathfrak{P}$ auf $R(P:P)$ definiert wird. Daraus schließen wir weiter:

(3.5) Satz. *Der Endomorphismenhalbring $\circ\mathfrak{P}$ einer beliebigen archimedischen Halbgruppe P ist ein kommutativer archimedischer Halbring mit dem Einselement ι.*

Beweis. $\circ\mathfrak{P}$ ist kommutativ, denn nach (3.2) und (3.1 d, e) gelten die Gleichungssysteme $r:_P \sigma r = \tau r:_P \tau(\sigma r)$, $\sigma r:_P \sigma(\tau r) = r:_P \tau r = \sigma r:_P \tau(\sigma r)$, $\sigma(\tau r) = \tau(\sigma r)$ $(r \in P;\ \sigma, \tau \in \mathfrak{P})$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}$ der Bedingung 3 a) genügt. Es seien $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$, $\varrho \neq \sigma$, etwa $\varrho r > \sigma r$ für passendes $r \in P$. Nach (3.2) und (3.1 d) gilt $\varrho r:_P \sigma r = \varrho t:_P \sigma t$ und somit $\varrho t > \sigma t$ für jedes $t \in P$, also ist $\varrho = \sigma + \tau$ für ein $\tau \in \mathfrak{P}$. Da Θ_r ein Homomorphismus von $\mathfrak{P}$ in die archimedische Halbgruppe P ist, ist auch $\mathfrak{P}$ archimedisch.

Aus diesem Satz und weiter oben stehenden Bemerkungen folgt unmittelbar:

(3.6) Korollar. *Jede archimedische Halbgruppe ist eine A-Halbgruppe.*

Die Ausführungen von §1 gelten also insbesondere für die archimedischen Halbgruppen, und für diese lassen sie sich, wie wir im folgenden zeigen, noch vereinfachen und verschärfen. — Zunächst beweisen wir:

(3.7) SATZ. *Die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ einer archimedischen Halbgruppe P ist archimedisch, ebenso jede Zusammenhangskomponente P_μ von P und jede Halbgruppe $\overline{P}_{(\mu)}$.*

BEWEIS. $\overline{P}$ ist regulär, denn aus $s/\sigma + r/\varrho = t/\tau + r/\varrho$ folgt $(\tau\circ\varrho)(\varrho s+\sigma r) = (\sigma\circ\varrho)(\varrho t+\tau r)$ und somit $\tau s=\sigma t$, $s/\sigma = t/\tau$. Ist $r/\varrho \neq s/\sigma$, etwa $\sigma r = \varrho s + t$ für ein $t\in P$, so ist $r/\varrho = s/\sigma + t/(\varrho\circ\sigma)$, also $r/\varrho > s/\sigma$; daher genügt $\overline{P}$ der Bedingung 3a). Für alle $r, s\in P$ und $\varrho, \sigma\in\mathfrak{P}$ gibt es ein $n\in\boldsymbol{N}$ mit $n(\sigma r) > \varrho s$, also ist $n(r/\varrho) > s/\sigma$; daher genügt $\overline{P}$ der Bedingung 3b). Also ist $\overline{P}$ archimedisch. — Für P_μ und $\overline{P}_{(\mu)}$ genügt es, die Gültigkeit von 3a) nachzuweisen. Es seien $r, s\in P_\mu$, etwa $\varrho r = \sigma s$, und es sei $r\neq s$, etwa $r = s+t$ für ein $t\in P$. Dann gilt nach (3.5) $\sigma = \varrho+\tau$ für ein $\tau\in\mathfrak{P}$, und es ist $\tau s = \varrho t$, also $t\in P_\mu$. Es seien $r/\varrho, s/\sigma\in\overline{P}_{(\mu)}$, $r/\varrho\neq s/\sigma$, etwa $\sigma r = \varrho s + t$ für ein $t\in P$. Wegen $\sigma r, \varrho s\in P_\mu$ ist dann auch $t\in P_\mu$, also $r/\varrho = s/\sigma + t/(\varrho\circ\sigma)$ mit $t/(\varrho\circ\sigma)\in\overline{P}_{(\mu)}$.

Dieser Satz zeigt, daß in Lemma (1.3) und Korollar (1.4), angewandt auf archimedische Halbgruppen P, die Forderung „$\overline{P}$ genügt der Bedingung 1c)" trivialerweise erfüllt ist; insbesondere ist also jede zusammenhängende archimedische Halbgruppe fraktionsregulär. Wir werden in §5, Beispiel 12, sehen, daß andererseits auch die „extrem unzusammenhängenden" (nämlich die durch eine über $\cdot\boldsymbol{Q}$ algebraisch unabhängige Untermenge von $\boldsymbol{R}_+$ erzeugten) archimedischen Halbgruppen fraktionsregulär sind.

Wir wollen jetzt die in §1 eingeführten Begriffe „zusammenhängend", „primitiv" und „fraktionsregulär" für archimedische Halbgruppen mit Hilfe der Proportionen erklären. Hierzu bemerken wir, daß $\Pi_{\mathfrak{P},P}$, $\Pi_{P,\overline{P}}$, $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ und $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}$ wegen $\mathfrak{P}\tilde{\subseteqq}P\tilde{\subseteqq}\overline{P}$, $\mathfrak{P}\tilde{\subseteqq}\overline{\mathfrak{P}}\tilde{\subseteqq}\overline{P}$ definiert sind, und beweisen:

(3.8) LEMMA. a) *Es ist $r\underset{\overline{P}}{\sim}s$ genau dann, wenn $r:_P s\in\Pi_{\mathfrak{P},P}\mathfrak{P}:\mathfrak{P}$ gilt.*

b) *P ist genau dann zusammenhängend, wenn $\Pi_{\mathfrak{P},P}$ bijektiv ist.*

c) *P ist genau dann fraktionsregulär, wenn $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv ist.*

d) *$r\in P$ ist genau dann primitiv für P, wenn $\{r:_P s\,|\,s\in P\}\subseteqq$ (und somit $=$) $R(P:P)$ ist.*

BEWEIS. a) Aus $\varrho r=\sigma s$ folgt $r:_P s=\varrho r:_P\varrho s=\sigma s:_P\varrho s=\Theta_s\sigma:_P\Theta_s\varrho=\Pi_{\mathfrak{P},P}\sigma:_{\mathfrak{P}}\varrho$. Andererseits folgt aus $r:_P s\in\Pi_{\mathfrak{P},P}\mathfrak{P}:\mathfrak{P}$ die Gleichung $r:_P s=\Theta_s\sigma:_P\Theta_s\varrho=\sigma s:_P\varrho s$ für geeignete $\varrho,\sigma\in\mathfrak{P}$, und daraus folgt wegen (3.1d, e) $\sigma(\varrho s):_P\sigma s=\varrho s:_P s=\sigma s:_P r=\varrho(\sigma s):_P\varrho r$, $\sigma s=\varrho r$. — b) folgt unmittelbar aus a). — c) Es sei P fraktionsregulär. Für alle $\overline{\varrho}_i=(\mathfrak{h}\sigma_i)^{-}\circ\mathfrak{h}\tau_i\in\overline{\mathfrak{P}}$ $(i=1,2)$ gilt $\overline{\varrho}_1:_{\overline{\mathfrak{P}}}\overline{\varrho}_2=\mathfrak{h}(\sigma_2\circ\tau_1):_{\overline{\mathfrak{P}}}\mathfrak{h}(\sigma_1\circ\tau_2)=\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}(\sigma_2\circ\tau_1):_{\mathfrak{P}}(\sigma_1\circ\tau_2)\in\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}\mathfrak{P}:\mathfrak{P}$, also ist $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv. Andererseits sei $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv. Aus $\eta r\underset{\overline{P}}{\sim}\eta s$ folgt nach a) $\eta r:_{\overline{P}}\eta s\in\Pi_{\overline{\mathfrak{P}},\overline{P}}\overline{\mathfrak{P}}:\overline{\mathfrak{P}}$, also ist nach Voraussetzung $\eta r:_{\overline{P}}\eta s=\Pi_{\overline{\mathfrak{P}},\overline{P}}(\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}\varrho:_{\mathfrak{P}}\sigma)=\Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}\varrho:_{\mathfrak{P}}\sigma$ für geeignete $\varrho,\sigma\in\mathfrak{P}$; und wegen $\eta r:_{\overline{P}}\eta s=\Pi_{P,\overline{P}}r:_P s$, $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}\varrho:_{\mathfrak{P}}\sigma=\Pi_{P,\overline{P}}(\Pi_{\mathfrak{P},P}\varrho:_{\mathfrak{P}}\sigma)$ folgt daraus weiter $r:_P s=\Pi_{\mathfrak{P},P}\varrho:_{\mathfrak{P}}\sigma$, also $r\underset{\overline{P}}{\sim}s$. Nach (1.3) ist daher P fraktionsregulär. — d) folgt unmittelbar aus $R(P:P)=\{r:_P\Theta_r\sigma\,|\,\sigma\in\mathfrak{P}\}$.

Wir bemerken noch, daß $\Pi_{P,\overline{P}}$ stets bijektiv ist (denn für alle $r,s\in P$ und $\varrho,\sigma\in\mathfrak{P}$ gilt $r/\varrho:_{\overline{P}}s/\sigma=\eta(\sigma r):_{\overline{P}}\eta(\varrho s)=\Pi_{P,\overline{P}}\sigma r:_P\varrho s$).

Aus (3.8d) und einer Bemerkung in §1 folgt sofort:

(3.9) KOROLLAR. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

α) *P ist eudoxisch;*

β) *alle $r \in P$ sind primitiv für P;*

γ) *P ist symmetrisch und zusammenhängend.*

Als nächstes zeigen wir, daß man für archimedische Halbgruppen den Begriff der „regulären Injektion" durch den der „regulären Einbettbarkeit" ersetzen kann.

Wir sagen, daß P *regulär einbettbar in* P' ist, in Zeichen $P \lessdot P'$, wenn $P \tilde{\leqq} P'$ und $\Pi_{P,P'} R(P:P) \leqq R(P':P')$ gelten; in diesem Falle ist die Abbildung

$$\mathrm{e}_{P,P'} = \Omega_{P'}^{\perp} \circ \Pi_{P,P'} \circ \Omega_P$$

von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ definiert. Wir bemerken, daß $P \lessdot P'$ in jedem der folgenden Fälle gilt: a) $P \cong P'$; b) $R(P:P) = \{r :_P k r \mid k \in \boldsymbol{N}\}$; c) P' ist eudoxisch; d) es existieren eine Injektion φ von P in P' und ein $r \in P$ derart, daß φr primitiv für P' ist. — Insbesondere gilt stets $\mathfrak{P} \lessdot P$ (denn für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{\mathfrak{P},P} \iota :_{\mathfrak{P}} \sigma = \Theta_r \iota :_P \Theta_r \sigma = r :_P \sigma r$ regulär).

(3.10) LEMMA. *Für archimedische Halbgruppen P, P' sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) *Es gibt eine Injektion φ von P in P', eine Abbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ und ein $r \in P$ derart, daß $\varphi(\sigma r) = (\mathfrak{f}\sigma)(\varphi r)$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ gilt;*

β) *es gilt $P \lessdot P'$;*

γ) *es gilt $P \tilde{\leqq} P'$, und alle Injektionen von P in P' sind regulär.*

In diesem Falle gehört zu jeder Injektion φ von P in P' dieselbe Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$, nämlich $\mathfrak{f} = \mathrm{e}_{P,P'}$.

BEWEIS. $\gamma) \Rightarrow \alpha)$ ist trivial. — $\alpha) \Rightarrow \beta)$: Für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{P,P'} r :_P \sigma r = \varphi r :_{P'} \varphi(\sigma r) = \varphi r :_{P'} (\mathfrak{f}\sigma)(\varphi r)$ regulär, also gilt $P \lessdot P'$. — $\beta) \Rightarrow \gamma)$: Für jede Injektion φ von P in P' gilt $\varphi \circ \sigma = (\mathrm{e}_{P,P'}\sigma) \circ \varphi$ wegen $\varphi r :_{P'} \varphi(\sigma r) = \Pi_{P,P'} r :_P \sigma r = (\Pi_{P,P'} \circ \Omega_P)\sigma = (\Omega_{P'} \circ \mathrm{e}_{P,P'})\sigma = \varphi r :_{P'} (\mathrm{e}_{P,P'}\sigma)(\varphi r)$ $(r \in P;\ \sigma \in \mathfrak{P})$. Ersichtlich ist $\mathrm{e}_{P,P'}$ eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$, und die in α) betrachtete Abbildung $\mathfrak{f}$ ist notwendig gleich $\mathrm{e}_{P,P'}$.

Aus (3.10) und einer Bemerkung in §1 folgt insbesondere: Für die Zusammenhangskomponente P_μ von P gilt $P_\mu \lessdot P$ genau dann, wenn jeder Endomorphismus von P_μ durch einen Endomorphismus von P induziert wird. Gilt $P_\mu \lessdot P$ für eine symmetrische Zusammenhangskomponente P_μ, so ist P selbst symmetrisch. Ist andererseits P symmetrisch, so ist jede Zusammenhangskomponente P_μ eudoxisch und regulär einbettbar in P.

Ferner liefern (1.1) und (1.2) für archimedische Halbgruppen P, P' die folgenden Korollare:

(3.11) KOROLLAR. *Es sei $P \lessdot P'$. Dann gilt $\overline{P} \tilde{\leqq} \overline{P'}$, und zu jeder Injektion φ von P in P' gibt es genau eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{P}$ in $\overline{P'}$ mit $\eta' \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \eta$.*

Ist P fraktionsregulär, so gilt $\overline{P} \lessdot \overline{P}'$.

(3.12) KOROLLAR. *Es sei $P \lessdot P'$, und P' sei symmetrisch. Dann gilt $\overline{P} \tilde{\subseteq} P'$, und zu jeder Injektion φ von P in P' gibt es genau eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{P}$ in P' mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \eta$.*

Ist P fraktionsregulär, so gilt $\overline{P} \lessdot P'$.

Wir werden in §5, Beispiele 7 und 9, sehen, daß sich die Aussagen dieser Korollare nicht weiter verschärfen lassen.

Eine archimedische Halbgruppe P^* soll *symmetrische* bzw. *eudoxische Hülle von P* heißen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

A) *Es gilt $P \lessdot P^*$;*

B) *P^* ist symmetrisch bzw. eudoxisch;*

C) *ist P' symmetrisch bzw. eudoxisch und $P \lessdot P'$, so gilt $P^* \tilde{\subseteq} P'$* [8]).

Aus (3.9) und einer Bemerkung in §1 ergibt sich: Die symmetrische bzw. eudoxische Hülle von P (sofern eine solche existiert) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist P^s bzw. P^e eine symmetrische bzw. eudoxische Hülle von P, so gilt $P^s \lessdot P^e$, und es ist $P^s \cong P^e$ genau dann, wenn P^s zusammenhängend ist. Aus (3.12) folgt, daß $\overline{P}$ sicher dann eine symmetrische Hülle von P ist, wenn $\overline{P}$ symmetrisch ist; insbesondere gilt:

(3.13) SATZ. *Ist P fraktionsregulär, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische Hülle von P, die in Verschärfung von* C) *der folgenden Bedingung genügt:*

C′) *Ist P' symmetrisch und $P \lessdot P'$, so ist $\overline{P} \lessdot P'$.*

Für fraktionsreguläres P ist also η *universell* hinsichtlich der regulären Injektionen von P in symmetrische Halbgruppen. Ersichtlich hat auch jede Injektion von P in eine beliebige symmetrische Hülle von P diese Eigenschaft.

Aus (3.13) und (1.4) folgt sofort das

(3.14) KOROLLAR. *Ist P zusammenhängend, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische und eudoxische Hülle von P.*

Für nicht-fraktionsreguläre P läßt sich über die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ von P keine allgemeingültige Aussage machen (vgl. §5, Beispiele 8 und 10). Wir wissen auch nicht, ob zu jeder nicht-fraktionsregulären archimedischen Halbgruppe eine symmetrische Hülle existiert. Dagegen wollen wir noch zeigen, daß jede archimedische Halbgruppe eine eudoxische Hülle besitzt.

Zunächst setzen wir die Existenz einer eudoxischen Hülle P^* von P voraus und beweisen: Jede Injektion von P in P^* ist universell hinsichtlich der Injektionen von P in eudoxische Halbgruppen. Jede eudoxische Oberhalbgruppe von P enthält genau eine P umfassende eudoxische Hülle von P. In der Tat, es gilt das

[8]) Man beachte, daß man für die Definition der *eudoxischen* Hülle die Zeichen $\tilde{\subseteq}$, $\lessdot$ nicht zu unterscheiden braucht. (Für den symmetrischen Fall vgl. dagegen §5, Beispiel 9.)

(3.15) Lemma. *Es sei $\varkappa$ eine Injektion von P in eine eudoxische Hülle P^* von P. Zu jeder Injektion φ von P in irgendeine eudoxische Halbgruppe P' existiert genau eine Injektion φ^* von P^* in P' mit $\varphi = \varphi^* \circ \varkappa$.*

$\varphi^* P^*$ ist die einzige zu der Menge $E_\varphi = \{P'' \mid \varphi P \subseteqq P'' \subseteqq P',\ P''$ eudoxisch$\}$ gehörige eudoxische Hülle von P, und es ist $\varphi^* P^* = \bigcap_{P'' \in E_\varphi} P''$.

Beweis. Es sei $r \in P$. Wegen $P^* \tilde{\subseteqq} P'$ existiert nach (3.4) genau eine Injektion φ^* von P^* in P' mit $\varphi^*(\varkappa r) = \varphi r$; nach (3.2) gilt $(\varphi r, \varphi s) \asymp (r, s) \asymp \big(\varphi^*(\varkappa r), \varphi^*(\varkappa s)\big)$ für alle $s \in P$, also ist $\varphi = \varphi^* \circ \varkappa$ wegen (3.1e). Aus der Eindeutigkeit von φ^* folgt $\varphi^* P^* \subseteqq P''$ für jedes $P'' \in E_\varphi$; andererseits ist $\varphi^* P^* \in E_\varphi$, also $\varphi^* P^* = \bigcap_{P'' \in E_\varphi} P''$. Genau dann ist $P'' \in E_\varphi$ eine eudoxische Hülle von P, wenn $P^* \tilde{\subseteqq} P'' \tilde{\subseteqq} P^*$ gilt, und dies trifft genau dann zu, wenn φ^* eine Bijektion von P^* auf P'', d.h. wenn $P'' = \varphi^* P^*$ ist.

Wir zeigen nun:

(3.16) Satz. *Jede archimedische Halbgruppe besitzt eine eudoxische Hülle.*

Beweis. Es sei $r_0 \in P$, und $\varkappa$ sei die durch $\varkappa r_0 = 1$ bestimmte Injektion von P in $\boldsymbol{R}_+$. Ferner sei $P_1 = \varkappa P$, und P_{n+1} sei die durch die Menge $\{u \in \boldsymbol{R}_+ \mid (r, s) \asymp (t, u)$ für passende $r, s, t \in P_n\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe $(n \in \boldsymbol{N})$. Dann gilt $P_1 \subseteqq P_2 \subseteqq P_3 \subseteqq \cdots$, und die Vereinigung $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} P_n$ bildet ersichtlich eine eudoxische Halbgruppe P^*. Um zu zeigen, daß P^* eine eudoxische Hülle von P ist, betrachten wir eine Injektion φ von P in irgendein eudoxisches P' und bezeichnen mit λ die durch $\lambda(\varphi r_0) = 1$ bestimmte Injektion von P' in $\boldsymbol{R}_+$. Aus $(1, \varkappa s) \asymp (r_0, s) \asymp \big(1, \lambda(\varphi s)\big)$ $(s \in P)$ folgt $\varkappa = \lambda \circ \varphi$ und somit $P_1 \subseteqq \lambda P'$. Angenommen, es sei bereits $P_n \subseteqq \lambda P'$ bewiesen. Ist $u \in \boldsymbol{R}_+$ und $(r, s) \asymp (t, u)$ für geeignete $r, s, t \in P_n$, so gilt $u \in \lambda P'$, weil $\lambda P'$ eudoxisch ist; daraus folgt sofort $P_{n+1} \subseteqq \lambda P'$. Also gilt auch $P^* \subseteqq \lambda P'$ und somit $P^* \tilde{\subseteqq} P'$. Daher ist P^* eine eudoxische Hülle von P. Wir bemerken noch, daß P^* gleich der Additionshalbgruppe des kleinsten P enthaltenden Unterhalbkörpers von $\cdot\boldsymbol{R}_+$ ist (vgl. (2.4)).

Im Gegensatz zu der Bildung der Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ ist die im vorstehenden Beweis ausgeführte Konstruktion der eudoxischen Hülle P^* von P kein algebraischer Prozeß, denn es wird dabei von der Existenz der archimedischen Halbgruppe $\boldsymbol{R}_+$ Gebrauch gemacht, die sich aus P nicht auf algebraischem Wege gewinnen läßt. Auch wenn man den Konstruktionsprozeß so abändert, daß man anstelle von $\boldsymbol{R}_+$ eine beliebige eudoxische Halbgruppe P' mit $P \tilde{\subseteqq} P'$ (und für $\varkappa$ eine beliebige Injektion von P in P') verwendet, so bleibt immer noch die Frage offen, ob und wie man ein solches P' durch einen algebraischen Prozeß aus P gewinnen kann.

Aus (3.15) und (3.16) erhält man noch die folgende Charakterisierung der eudoxischen Hüllen:

(3.17) Korollar. *Es sei $P \tilde{\subseteqq} P'$, und P' sei eudoxisch. Genau dann ist P' eine eudoxische Hülle von P, wenn keine eudoxische Halbgruppe P'' mit $P \tilde{\subseteqq} P'' \subset P'$ existiert.*

§ 4. Archimedische Halbringe

Jeder archimedische Halbring $\cdot P$ ist ein A-Halbring (denn seine Additionshalbgruppe P ist eine A-Halbgruppe und Ξ ist injektiv); daher lassen sich die Ausführungen von § 2 auf archimedische Halbringe anwenden. Wir wollen sie in einigen Punkten ergänzen.

Zunächst bemerken wir, daß für jeden archimedischen Halbring $\cdot P$ stets

$$r_1 :_P s_1 = r_2 :_P s_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot s_2 = r_2 \cdot s_1 \qquad (r_i, s_i \in P)$$

gilt. Ferner gilt neben $\mathfrak{P} \preccurlyeq P$ auch $P \preccurlyeq \mathfrak{P}$ (denn Ξ ist eine Injektion von P in $\mathfrak{P}$, und für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{P,\mathfrak{P}} r :_P \sigma r = \Xi r :_{\mathfrak{P}} \Xi(\sigma r) = \Xi r :_{\mathfrak{P}} (\sigma \circ \Xi r)$ eine reguläre Proportion von $\mathfrak{P}$).

In Lemma (2.2), angewandt auf archimedische Halbringe $\cdot P$ mit Einselement, braucht die Regularität der Injektion φ nicht vorausgesetzt zu werden, sondern sie folgt vielmehr aus jeder der beiden Bedingungen α) und γ); d.h., es gilt das folgende

(4.1) KOROLLAR. *Es seien $\cdot P, \cdot P'$ archimedische Halbringe, $\cdot P$ besitze ein Einselement e, und φ sei eine Injektion von P in P'. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) *φ ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$;*

β) *es gelten $P \preccurlyeq P'$ und $e_{P,P'} \circ \Xi = \Xi' \circ \varphi$;*

γ) *φe ist Einselement von $\cdot P'$.*

Zum Beweis beachte man: Ist φe Einselement von $\cdot P'$, so ist φe primitiv für P' wegen (2.1), und nach einer Bemerkung von § 3 gilt daher $P \preccurlyeq P'$. Der weitere Beweis verläuft genauso wie der von (2.2), unter Berücksichtigung von (3.10).

Aus (4.1) folgt insbesondere: Zu zwei vorgegebenen archimedischen Halbringen $\cdot P, \cdot P'$ mit Einselement existiert höchstens eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$, und diese ist notwendig regulär. Die erstere Behauptung gilt auch für archimedische Halbringe $\cdot P, \cdot P'$ ohne Einselement; sind nämlich φ_1, φ_2 Injektionen von $\cdot P$ in $\cdot P'$, so gilt $\eta' \circ \varphi_i = \overline{\varphi} \circ \eta$ $(i = 1, 2)$ für eine eindeutig bestimmte Injektion $\overline{\varphi}$ von $\cdot\overline{P}$ in $\cdot\overline{P'}$, und daraus folgt $\varphi_1 = \varphi_2$. Dagegen folgt aus der Existenz einer Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$ im allgemeinen nicht $P \preccurlyeq P'$ (vgl. § 5, Beispiel 4).

Weiter bemerken wir, daß man, bei Anwendung auf archimedische Halbgruppen P, in (2.4) die Worte „symmetrisch und zusammenhängend" durch „eudoxisch" ersetzen und in den darauffolgenden Ausführungen auf die Voraussetzung der Fraktionsregularität von P verzichten kann (denn die Additionshalbgruppe eines archimedischen Halbringes ist stets eine zusammenhängende archimedische Halbgruppe und daher fraktionsregulär).

Aus einer Bemerkung von § 2 folgt, daß jede nicht-eudoxische Halbgruppe, die sich zu einem archimedischen Halbring mit Einselement machen läßt, auch zu einem solchen ohne Einselement gemacht werden kann. In § 5,

Beispiel 6, werden wir zeigen, daß es archimedische Halbgruppen gibt, die sich zu einem archimedischen Halbring ohne Einselement, aber zu keinem mit Einselement machen lassen. Daß es zusammenhängende archimedische Halbgruppen gibt, die überhaupt nicht zu einem archimedischen Halbring gemacht werden können, zeigt §5, Beispiel 5. Ist jedoch P zusammenhängend und *endlicherzeugt* (d.h. existiert eine endliche Untermenge U von P derart, daß P gleich der durch U erzeugten archimedischen Halbgruppe ist), so läßt sich P stets zu einem archimedischen Halbring machen, denn es gilt das folgende

(4.2) Lemma. *Es sei P eine zusammenhängende und endlicherzeugte archimedische Halbgruppe. Zu jedem $s\in P$ gibt es ein $\sigma\in\mathfrak{P}$ derart, daß s/σ quasiprimitiv für P ist.*

Beweis. P sei durch $\{r_1,\dots,r_k\}\subset P$ erzeugt, und es seien $\varrho_i,\sigma_i\in\mathfrak{P}$ so gewählt, daß $\sigma_i r_i=\varrho_i s$ $(i=1,\dots,k)$ gilt; ferner sei $\sigma=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_k$ und $\tau_i=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{i-1}\circ\varrho_i\circ\sigma_{i-1}\circ\cdots\circ\sigma_k$ $(i=1,\dots,k)$. Für jedes $t\in P$ gilt eine Gleichung $t=\sum\limits_{i=1,\dots,k} m_i r_i$ mit passenden $m_i\in\mathbf{Z}$, und es ist $\sigma t=\sum\limits_{i=1,\dots,k} m_i(\sigma r_i)=\sum\limits_{i=1,\dots,k} m_i(\tau_i s)=\tau s$ für $\tau=\sum\limits_{i=1,\dots,k} m_i\tau_i\in\mathfrak{P}$. Also ist s/σ quasiprimitiv für P.

Schließlich bemerken wir noch, daß man in Lemma (2.6), angewandt auf archimedische Halbringe $\cdot P'$, auf die Forderung der Regularität von φ verzichten kann. In der Tat, ist φ eine beliebige Injektion von P in P', so ist $\hat{\varphi}=\eta'\circ\varphi$ eine notwendig reguläre Injektion von P in die (eudoxische) Additionshalbgruppe $\overline{P'}$ des archimedischen Halbkörpers $\cdot\overline{P'}$, und es gilt daher (2.6) zunächst für $\hat{\varphi}$ anstelle von φ. Da η' eine Injektion von $\cdot P'$ in $\cdot\overline{P'}$ ist, folgt daraus sofort die Gültigkeit von (2.6) für φ selbst.

§5. Ergänzungen und Beispiele

(1) Es sei P eine archimedische Halbgruppe. Die Menge $P:P$ aller Proportionen von P bildet hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$(r:_P s)+(r:_P t)=r:_P(s+t)\quad\text{bzw.}\quad(r:_P s)\cdot(s:_P t)=r:_P t$$

definierten Addition und Multiplikation und der durch die Vorschrift

$$r_1:_P s_1>r_2:_P s_2\Leftrightarrow[k r_1\leqq l s_1\ \textit{und}\ k r_2>l s_2\ \textit{für geeignete}\ k,l\in\mathbf{N}]$$

definierten (strikten) Totalordnung einen *archimedischen Pseudohalbkörper*[9]) mit dem Einselement $r:_P r$ (unabhängig von der Wahl von $r\in P$). Für $P\subseteqq P'$ ist $\Pi_{P,P'}$ eine (ordnungserhaltende) Injektion von $P:P$ in $P':P'$; insbesondere ist $\Pi_{P,\bar{P}}$ eine Bijektion von $P:P$ auf $\overline{P}:\overline{P}$. (Man beachte, daß zu $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3\in P$ stets $r_1,r_2,r_3\in P$ mit $(r_i,r_j)\asymp(\bar{r}_i,\bar{r}_j)$ $(i,j=1,2,3)$ existieren.)

[9]) „Pseudo-" bedeutet hier: Die Addition und die Multiplikation sind nicht notwendig auf ganz $P:P$ definiert, und die Bedingung 3c) ist zu ersetzen durch: 3c′) $\mathfrak{r}>\hat{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{r}\rightsquigarrow\hat{\mathfrak{s}}$ $\Leftrightarrow\mathfrak{r}=\hat{\mathfrak{s}}+\mathfrak{t}$ *für passendes* $\mathfrak{t}\in P:P$ $(\mathfrak{r},\hat{\mathfrak{s}}\in P:P)$. (Hierbei schreiben wir $\mathfrak{r}\rightsquigarrow\hat{\mathfrak{s}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{r}=t:_P r$, $\hat{\mathfrak{s}}=t:_P s$ für geeignete $r,s,t\in P$ gilt.)

Die Abbildung Ω_P ist eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in den Pseudohalbkörper $P:P$; genau dann ist Ω_P eine Bijektion, wenn P eudoxisch ist. Für jedes $r \in P$ ist $\Omega_P = \mathsf{H}_r \circ \Theta_r$, wobei H_r die durch die Vorschrift

$$\mathsf{H}_r s = r :_P s \qquad (s \in P)$$

definierte Injektion von P in die Additions-Pseudohalbgruppe von $P:P$ bezeichnet. Ist $r \in P$ primitiv für P, so ist H_r eine Injektion von $^{r}\!P$ in $P:P$.

Für jedes P läßt sich der Pseudohalbkörper $P:P$ kanonisch in den Halbkörper $\cdot\boldsymbol{R}_+$ einbetten. In der Tat, bezeichnet H_1 die durch $\mathsf{H}_1 s = 1 :_{\boldsymbol{R}_+} s$ $(s \in \boldsymbol{R}_+)$ bestimmte Bijektion von $\cdot\boldsymbol{R}_+$ auf $\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{R}_+$, so ist $\mathsf{H}_1^{-} \circ \Pi_{P, \boldsymbol{R}_+}$ eine Injektion von $P:P$ in $\cdot\boldsymbol{R}^+$.

Ist P zusammenhängend, so sind Addition und Multiplikation auf ganz $P:P$ definiert, und $P:P$ bildet einen archimedischen Halbkörper. Seine Additionshalbgruppe ist eine eudoxische Hülle von P.

(2) Es sei P eine archimedische Halbgruppe und $r \in P$. Für jeden das Einselement ι enthaltenden archimedischen Unterhalbring $\mathfrak{R}$ von $\circ\mathfrak{P}$ ist $P' = \Theta_r \mathfrak{R}$ eine archimedische Unterhalbgruppe von P mit den Eigenschaften: r ist primitiv für P' und $P' \trianglelefteq P$. Andererseits ist jede diesen Bedingungen genügende archimedische Unterhalbgruppe P' von P von der Form $P' = \Theta_r \mathfrak{R}$ für passendes $\mathfrak{R}$. — Daß ein Element $r \in P$ auch primitiv für eine archimedische Unterhalbgruppe P'' von P mit $P'' \ll P$ sein kann, zeigt das folgende Beispiel: Es sei P die durch $\boldsymbol{Q}_+ \cup \{t\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe, wobei $t \in \boldsymbol{R}_+$ transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}$ ist; dann ist jedes $q \in \boldsymbol{Q}_+$ primitiv für $\boldsymbol{Q}_+$, aber es ist $\boldsymbol{Q}_+ \ll P$.

(3) Die Unterhalbgruppe P' der A-Halbgruppe P heißt *normal* in P, wenn $\varrho P' \subseteqq P'$ für alle $\varrho \in \mathfrak{P}$ gilt; in diesem Falle ist die Abbildung, die jedem $\varrho \in \mathfrak{P}$ seine Beschränkung auf P' zuordnet, eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Insbesondere ist jede Zusammenhangskomponente P_μ von P normal in P. Ist P' normal in P und in einer Zusammenhangskomponente von P enthalten, so ist P' zusammenhängend. — Es sei P' eine zusammenhängende archimedische Unterhalbgruppe von $\boldsymbol{R}_+$ mit $1 \in P'$ und $\boldsymbol{Q}_+ \supsetneqq P'$ (z.B. $P' = \boldsymbol{Q}[u]_+$ für ein $u \in \boldsymbol{R}_+$, $u \notin \boldsymbol{Q}_+$). Ferner sei $x \in \boldsymbol{R}_+$ transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}(P')$, und P sei die durch $P' \cup \{x\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ (denn für jedes $\varrho \in \mathfrak{P}$ gelten $1 :_P \varrho 1 = x :_P \varrho x$, $\varrho x = x \cdot \varrho 1$ und somit $\varrho 1 \in \boldsymbol{N}$), P' ist normal in P, aber P' ist in keiner Zusammenhangskomponente von P enthalten.

(4) Es sei $\{x, y, z\} \subset \boldsymbol{R}_+$ algebraisch unabhängig über $\cdot\boldsymbol{Q}$, und $\cdot P$ bzw. $\cdot P'$ sei der durch $S = \{y^i \cdot z^{j-1} \mid i, j \in \boldsymbol{N}\}$ bzw. $S \cup \{x\}$ erzeugte archimedische Unterhalbring (ohne Einselement) von $\cdot\boldsymbol{R}_+$. Dann existiert eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$ (nämlich die identische), aber es gilt $P \ll P'$. In der Tat $y :_P y \cdot z$ ist regulär, dagegen nicht $y :_{P'} y \cdot z$, denn aus $y :_{P'} y \cdot z = x :_{P'} t$ folgte $t = x \cdot z \notin P'$.

(5) Es sei U eine unendliche Menge von Primzahlen, und P sei die durch $\{p^{-1} \mid p \in U\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist P zusammenhängend, läßt sich aber auf keine Weise zu einem archimedischen Halbring

machen. (Zum Beweis beachte man: Es sei v_p die p-adische Bewertung von $\cdot\boldsymbol{Q}$; dann gilt $v_p r \geqq -1$ für alle $r \in P$, und für jede hinsichtlich der Addition distributive Multiplikation $\odot$ von P gilt daher $v_p(1 \odot 1) = v_p\left(p^2 \cdot (p^{-1} \odot p^{-1})\right) = v_p(p^2) + v_p(p^{-1} \odot p^{-1}) \geqq 1$ $(p \in U)$; also ist $1 \odot 1 = 0 \notin P$.)

(6) Es sei $\{u, v\} \subset \boldsymbol{R}_+$ algebraisch unabhängig über $\cdot\boldsymbol{Q}$. Die archimedische Halbgruppe $P = (\boldsymbol{Q}[u, v] \cdot u + \boldsymbol{Q}[u, v] \cdot v)_+$ bildet hinsichtlich der natürlichen Multiplikation einen archimedischen Halbring ohne Einselement, läßt sich aber auf keine Weise zu einem archimedischen Halbring mit Einselement machen. (Gäbe es nämlich ein für P primitives $r \in P$, so hätten wir $u \overset{r}{\cdot} u = u^2 \cdot r^{-1}$, $v \overset{r}{\cdot} v = v^2 \cdot r^{-1}$, was unmöglich ist.) Insbesondere ist also $P \cong \mathfrak{P}$, obwohl $P \lessdot \mathfrak{P} \lessdot P$ gilt.

(7) Es sei $\{u, v\}$ wie in (6), $P = \boldsymbol{Q}[u]_+$, $P' = \left(\boldsymbol{Q}[u] + \boldsymbol{Q} \cdot v\right)_+$. Dann ist P' symmetrisch und $P \subseteqq P'$, aber $\overline{P} \cong \boldsymbol{Q}(u)_+ \nsubseteqq P'$.

(8) Es sei $u \in \boldsymbol{R}_+$ algebraisch vom Grad $m > 1$ oder transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}$ (im letzteren Fall setzen wir $m = \infty$), und es sei P die durch $\boldsymbol{Q}_+ \cup \{u^i \mid 1 \leqq i < m\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, $\boldsymbol{Q}_+$ ist eine Zusammenhangskomponente von P, $\boldsymbol{Q}_+ \lessdot\!\lessdot P$, und $\overline{P}$ ist isomorph zu $\boldsymbol{Q}[u]_+$ und somit zusammenhängend. P ist nicht fraktionsregulär, denn es gilt $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{P}}$ bzw. $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\cdot} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{L}} \subset \overline{\mathfrak{P}}$ im Falle $m < \infty$ bzw. $m = \infty$; im ersteren Falle ist $\overline{P}$ eudoxisch, im letzteren ist $\overline{P}$ unsymmetrisch.

(9) Es seien u, P wie in (8), und $v \in \boldsymbol{R}_+$ sei transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}(u)$. Dann ist $P' = \left(\boldsymbol{Q}[u] + \boldsymbol{Q} \cdot v\right)_+$ symmetrisch, und es gelten $P \lessdot P'$, $\overline{P} \tilde{\subseteqq} P'$. Es ist aber $\overline{P} \lessdot\!\lessdot P'$ (denn $\eta 1 :_{\overline{P}} \eta u$ ist regulär, dagegen nicht $1 :_{P'} u$).

(10) Es seien u, v wie in (9), und es sei P die durch $\boldsymbol{Q}_+ \cup \{u^i \mid 1 \leqq i < m\} \cup \{u^i \cdot v \mid 0 \leqq i < m\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, $\overline{P}$ ist isomorph zu $P' = \left(\boldsymbol{Q}[u] + \boldsymbol{Q}[u] \cdot v\right)_+$, und wegen $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{P}}$ ist P nicht fraktionsregulär. P' ist unzusammenhängend (denn anderenfalls wäre $1 \underset{P'}{\sim} v$, und daraus folgte nach (2.6) $x = x \cdot 1^2 = y \cdot v^2$ für passende $x, y \in P'$), und P' ist genau dann symmetrisch, wenn $m < \infty$ (d.h. wenn u algebraisch über $\cdot\boldsymbol{Q}$) ist; dasselbe gilt für $\overline{P}$.

(11) Unter einem *Operatorenhalbring* bzw. einem *vollen Operatorenhalbring* einer archimedischen Halbgruppe P verstehen wir einen archimedischen Halbring Λ derart, daß eine Injektion bzw. Bijektion ξ von Λ in bzw. auf $\circ\mathfrak{P}$ existiert. — Ist $\cdot P'$ ein archimedischer Halbring mit dem Einselement e' und ist $P \lessdot P'$, so wird $\circ\mathfrak{P}$ durch $\Theta'_{e'} \circ \mathfrak{e}_{P,P'}$ auf einen vollen Operatorenhalbring Λ von P abgebildet, und Λ ist der größte in $\cdot P'$ enthaltene Operatorenhalbring von P. Besitzt auch $\overline{P}$ einen vollen Operatorenhalbring $\bar{\Lambda} \subseteqq \cdot P'$, so enthält $\bar{\Lambda}$ den Quotientenkörper $\frac{\Lambda}{\Lambda}$ von Λ, und es gilt $\frac{\Lambda}{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ genau dann, wenn P fraktionsregulär ist.

(12) Es sei $\cdot P'$ ein archimedischer Halbring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, und E' sei die Menge aller Einheiten von $\cdot P'$. Ferner sei P eine archimedische Halbgruppe und φ eine Injektion von P in P'. Mit Hilfe von (2.6)

zeigt man: a) Existiert ein $r \in P$ derart, daß φr quadratfrei in $\cdot P'$ ist, so g $P \leqslant P'$. b) Ist φr, für jedes $r \in P$, quadratfrei in $\cdot P'$ und enthält $\cdot P'$ ein Operatorenhalbring Λ^0 von P mit $E' \subseteqq \frac{\Lambda^0}{\Lambda^0}$, so ist auch $\overline{P} \leqslant P'$, und es g $E' = \frac{\Lambda^0}{\Lambda^0} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ (wobei Λ bzw. $\bar{\Lambda}$ den in $\cdot P'$ enthaltenen vollen Operatore halbring von P bzw. $\overline{P}$ bezeichnet); insbesondere ist dann P fraktionsregulär. Die in b) gemachte Voraussetzung über die Existenz von Λ^0 ist trivial Falle $E' = \boldsymbol{Q}_+$, denn P besitzt stets den Operatorenhalbring $\Lambda^0 = \boldsymbol{N}$, und ist $\boldsymbol{Q}_+ = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}}$. Die *beiden* in b) gemachten Voraussetzungen sind sicher da erfüllt, wenn P durch eine über $\cdot \boldsymbol{Q}$ algebraisch unabhängige Untermenge von $\boldsymbol{R}_+$ erzeugt ist (denn dann ist jedes $u \in U$ sogar prim in $\cdot P' = \cdot \boldsymbol{Q}[U]$ und $E' = \boldsymbol{Q}_+$). In diesem Falle gelten $\circ\mathfrak{P} \cong \cdot \boldsymbol{N}$, $\circ\overline{\mathfrak{P}} \cong \cdot \boldsymbol{Q}_+$, und alle Zusamme hangskomponenten von P bzw. $\overline{P}$ sind von der Form $\boldsymbol{N} \cdot \sum_{u \in U} n_u u$ bz $\boldsymbol{Q} \cdot \left(\sum_{u \in U} n_u u \right)$ (für geeignete $n_u \in \boldsymbol{Z}$; $n_u = 0$ für fast alle $u \in U$). Besteht U a mehr als einem Element, so besitzen P und $\overline{P}$ unendlich viele Zusamme hangskomponenten, und diese sind sämtlich isomorph zu $\boldsymbol{N}$ bzw. $\boldsymbol{Q}_+$.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 15. April 1961)

Nastold, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 359–390 (1961)

Zur Cohomologietheorie in der algebraischen Geometrie. I.

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Hans-Joachim Nastold

Einleitung[1])

Seit dem Erscheinen der grundlegenden Serreschen Arbeit „Faisceaux algébriques cohérents" [*18*] hat die Garbentheorie und die Cohomologietheorie in der abstrakten algebraischen Geometrie eine Reihe beachtlicher Erfolge zu verzeichnen. Genannt seien hier nur Serres Dualitätssatz [*19*], die Verallgemeinerung des Riemann-Roch-Hirzebruchschen Satzes durch Grothendieck [*2*], Grothendiecks Dualitätssätze für kohärente Garben [*10*] und die Fassung, welche Grothendieck der Zariskischen Theorie der holomorphen Funktionen gegeben hat [*12*]. Ein Teil dieser Ergebnisse ist bisher nur für den Fall der Geometrie über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper bewiesen worden. Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war der Wunsch, von dieser Einschränkung loszukommen.

Wir beweisen im zweiten Teil dieser Arbeit den *Serreschen Dualitätssatz* für lokal freie Garben auf einer singularitätenfreien projektiven Varietät *über einem beliebigen Konstantenkörper k und für beliebigen Funktionenkörper R/k* auf dem ursprünglichen Serreschen Wege. A. Grothendieck hat allgemeinere Dualitätssätze [*10*], [*12*] entwickelt. Das Hauptanliegen unserer Untersuchungen besteht darin, die Dualität mittels der durch einen Differentiationsprozeß gewonnenen *Differentialformen höchster Stufe* ganz wie im klassischen Fall auch unter den genannten allgemeinen Voraussetzungen zu realisieren. Wir stützen uns hier auf Ergebnisse von E. Kunz [*14*], die an (unveröffentlichte) Untersuchungen von F. K. Schmidt anknüpfen. Dort wird gezeigt, wie im Falle der Charakteristik p die Bildung der Kählerschen Differentialformen über passenden Unterkörpern des Konstantenkörpers k, den Differentialkonstantenkörpern, vernünftige Differentialformen auf einer abstrakten Varietät liefert. Die Wahl des Differentialkonstantenkörpers ist dabei noch weitgehend willkürlich. Für die Dualität wird aber nur die Garbe der Keime holomorpher Differentialformen der *höchsten Stufe* benützt, und die letztere erweist sich als unabhängig von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers. Gleichzeitig zeigt der ursprüngliche Serresche Beweisgang auch, daß die in [*14*] definierte kanonische Klasse in Analogie zum Fall der Dimension 1 die

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

im Riemann-Rochschen Satz auftretende Klasse ist. Ferner ergibt sich nach dem Serreschen Vorbild [20] der *Riemann-Rochsche Satz für Flächen* und andere klassische Resultate von ZARISKI nun *bei beliebigen Konstantenkörpern k und Funktionenkörpern R/k*. Dies ist von Interesse, solange die Grothendiecksche Fassung des Riemann-Rochschen Satzes noch nicht unter allgemeineren Voraussetzungen als in [2] bewiesen ist.

Im folgenden ersten Teil der Arbeit (§1) entwickeln wir dazu die Cohomologietheorie sogleich auf Präschemata im Sinne von GROTHENDIECK. Dieser Teil entstand aus dem Bestreben, eine Einführung in die *Cohomologietheorie auf Schemata* zu geben, ohne viel aus der Garbentheorie und der homologischen Algebra vorauszusetzen, *unter Beschränkung auf die* in der algebraischen Geometrie zunächst interessierende *Kategorie der quasi-kohärenten Garben*. Wir bedienen uns dabei der „funktoriellen Sprache", setzen deren Kenntnis jedoch nicht voraus, sondern entwickeln sie an unserem konkreten Gegenstand. Nach allgemeinen Ausführungen über Garben und geringte Räume im ersten Abschnitt werden im zweiten Abschnitt zunächst affine Schemata und die Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf ihnen eingeführt. Sodann werden Präschemata definiert. Das sind, abweichend von der Terminologie bei GROTHENDIECK, geringte Räume, die eine endliche Überdeckung durch offene affine Mengen zu noetherschen Ringen besitzen. Auf solchen Präschemata untersuchen wir die Kategorie der quasi-kohärenten Garben und abgeleitete Funktoren in letzterer, sowie deren Berechnung mittels Čechscher Auflösungen. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit projektiven Schemata über einem affinen Schema. Wir beweisen die Äquivalenz der Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf einem projektiven Schema und einer Quotientenkategorie der Kategorie der graduierten Moduln über dem zugehörigen graduierten Ring und abschließend die Endlichkeitssätze im projektiven Fall.

Alle im folgenden auftretenden Ringe seien kommutativ mit Einselement, alle Homomorphismen zwischen solchen unitär, desgleichen alle Moduln über Ringen. Das Literaturverzeichnis bezieht sich auf beide Teile und befindet sich am Ende.

§ 1. Cohomologietheorie auf Schemata

1.1. Garben und geringte Räume

1.1.1. *Kategorien* ([9], chap. I.1.1., 1.2., 1.8. und [8], chap. I.1.7.). Eine Kategorie $\boldsymbol{K}$ besteht aus einer nicht leeren Klasse von *Objekten* $A, B, C, \ldots$ und Mengen $\mathrm{Hom}(A, B)$ für alle Objekte $A, B \in \boldsymbol{K}$, deren Elemente *Morphismen* von A in B genannt werden, mit einer Verknüpfung $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ für alle $A, B, C \in \boldsymbol{K}$, der *Zusammensetzung* der Morphismen, so daß

(i) die Zusammensetzung assoziativ ist,

(ii) für alle $A \in \boldsymbol{K}$ ein $e_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ mit $u \circ e_A = u$, $e_A \circ v = v$ für alle $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $v \in \mathrm{Hom}(C, A)$ existiert.

$u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn es ein $v \in \mathrm{Hom}(B, A)$ mit $v \circ u = e_A$ und $u \circ v = e_B$ gibt.

Beispiele. a) Objekte = Mengen, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Abbildungen der Menge A in die Menge B. b) Objekte = abelsche Gruppen, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Homomorphismen der Gruppe A in die Gruppe B. c) Objekte = Ringe, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Ringhomomorphismen des Ringes A in den Ring B. Zusammensetzung für a), b) und c) = übliche Zusammensetzung von Abbildungen.

Für $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ schreibt man oft anschaulich $u: A \to B$.

Ist $\boldsymbol{K}$ eine Kategorie, so heißt die Kategorie $\boldsymbol{K}^0$ bestehend aus denselben Objekten wie $\boldsymbol{K}$, den Morphismen $\mathrm{Hom}^0(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A)$ und derselben Zusammensetzung die zu K *duale Kategorie*.

$\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ seien zwei Kategorien. Wir nennen (kovarianten) *Funktor* von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ eine „Funktion", die jedem Objekt $A \in \boldsymbol{K}$ ein Objekt $F(A) \in \boldsymbol{K}'$ und jedem Morphismus $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ einen Morphismus $F(u) \in \mathrm{Hom}\big(F(A), F(B)\big)$ zuordnet, so daß $F(e_A) = e_{F(A)}$ und $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$ ist. Ein kontravarianter Funktor von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ ist ein kovarianter Funktor von $\boldsymbol{K}^0$ in $\boldsymbol{K}'$.

F und G seien zwei Funktoren von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$. Ein *Morphismus von Funktoren* oder eine natürliche Transformation f von F in G ist eine „Funktion", die jedem $A \in \boldsymbol{K}$ einen Morphismus $f(A)$ von $F(A)$ in $G(A)$ zuordnet, so daß für jeden Morphismus $u: A \to B$ in $\boldsymbol{K}$, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \\ {\scriptstyle f(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(B)} \\ G(A) & \xrightarrow{G(u)} & G(B) \end{array}$$

kommutativ ist. Morphismen von Funktoren lassen sich zusammensetzen. Sind $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ zwei feste Kategorien und bilden die Objekte von $\boldsymbol{K}$ eine Menge, so bilden die Funktoren von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ als Objekte und die Morphismen von Funktoren als Morphismen zwischen diesen Objekten eine neue Kategorie.

J sei eine im folgenden festbleibende teilweise geordnete Menge. Ein *inverses System über J mit Werten in der Kategorie* $\boldsymbol{K}$ ist ein System von Objekten und Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ (A_i, r_i^j), $A_i \in \boldsymbol{K}$ für alle $i \in J$, $r_i^j \in \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ für alle $i < j \in J$ mit $r_i^k = r_i^j \circ r_j^k$ für alle $i < j < k \in J$ und $r_i^i = e_{A_i}$ für alle $i \in J$.

Betrachtet man J als eine Kategorie mit den Elementen von J als Objekten und den Morphismen $\mathrm{Hom}(i, j)$ aus einem Element bestehend, falls $i < j$, und leer sonst, so kann man ein inverses System über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ auch auffassen als einen kontravarianten Funktor von J in $\boldsymbol{K}$. Die oben definierten Morphismen von Funktoren ergeben dann Morphismen zwischen inversen Systemen: Ein Morphismus des inversen Systems (A_i, r_i^j) in das inverse System $(\tilde{A}_i, \tilde{r}_i^j)$ ist eine Familie $(u_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$ von Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ mit $u_i \circ r_i^j = \tilde{r}_i^j \circ u_j$ für alle $i < j \in J$. $\prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$ bedeutet hier und im folgenden das Produkt der Mengen $\mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$. Die Klasse aller inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ bildet mit den so definierten Morphismen nun wieder eine Kategorie.

Wir nennen ein System (A, r_i) bestehend aus einem Objekt $A \in \boldsymbol{K}$ und einer Familie $(r_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A, A_i)$ von Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ mit $r_i = r_i^j \circ r_j$ für alle $i < j \in J$ *inverser Limes* des inversen Systems (A_i, r_i^j), wenn für alle $T \in \boldsymbol{K}$ die für $t \in \mathrm{Hom}(T, A)$ durch $r_i \circ t = s_i \in \mathrm{Hom}(T, A_i)$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}(T, A) \to \big((s_i);\ (s_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(T, A_i),\ s_i = r_i^j \circ s_j \text{ für alle } i < j \in J\big)$ bijektiv[2] ist. Der inverse Limes ist, falls er existiert, bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Wählt man daher für jedes inverse System, welches einen inversen Limes besitzt, einen solchen aus (etwa mittels des Hilbertschen τ-Symbols), und bezeichnet das zugehörige Objekt aus $\boldsymbol{K}$ mit $\varprojlim (A_i, r_i^j)$ oder $\varprojlim_{i \in J} A_i$, so ist $\varprojlim_{i \in J} A_i$, falls für alle inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ existierend, ein Funktor von der Kategorie der inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ in die Kategorie $\boldsymbol{K}$.

Als Spezialfall des inversen Limes erhält man für eine trivial geordnete Menge J, d.h. für kein Elementepaar $i \neq j \in J$ soll $i < j$ gelten, das *(direkte) Produkt* einer Familie $(A_i)_{i \in J}$ von Objekten aus $\boldsymbol{K}$, welches mit $\prod_{i \in J} A_i$ bezeichnet und durch $\mathrm{Hom}\big(T, \prod_{i \in J} A_i\big) \to \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(T, A_i)$ bijektiv für alle $T \in \boldsymbol{K}$ charakterisiert ist. Dual zum Begriff des inversen Systems bzw. Limes ist der des *direkten Systems* bzw. *Limes*. Letzterer liefert analog als Spezialfall die direkte Summe $\bigoplus_{i \in J} A_i$. In unseren obigen Beispielen a), b) und c) existiert für eine beliebige teilweise geordnete Menge J der inverse Limes jedes inversen Systems über J mit Werten in einer dieser Kategorien. Man erhält ihn folgendermaßen: In jedem der drei Fälle sind die Objekte A_i des inversen Systems Mengen. Wir können daher die folgende Untermenge des Produktes $\prod_{i \in J} A_i$ bilden: $A = \big((a_i);\ (a_i) \in \prod_{i \in J} A_i,\ r_i^j(a_j) = a_i \text{ für alle } i < j \in J\big)$. a_i bezeichnet dabei ein Element aus A_i. In den Fällen b) und c) läßt sich die Menge A auf genau eine Weise mit der Struktur einer abelschen Gruppe bzw. eines Ringes versehen, so daß die natürlichen Projektionen $r_i : A \to A_i$, definiert durch $r_{i_0}\big((a_i)\big) = a_{i_0}$, sämtlich Homomorphismen sind. Das System (A, r_i) besitzt dann die Eigenschaften eines inversen Limes des inversen Systems (A_i, r_i^j).

Der direkte Limes existiert für beliebige direkte Systeme in den Fällen a) und b) und im Falle c) jedenfalls dann, wenn die teilweise geordnete Menge J aufsteigend gefiltert ist, d.h. wenn zu $i, j \in J$ ein $k \in J$ mit $i < k,\ j < k$ existiert.

1.1.2. *Prägarben und Garben* ([13], chap. 0, 3.1., 3.2., [8], chap. I.1.9, chap. II, 1.1.). X sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U)$ das System aller offenen Mengen auf X. Wir denken uns $\mathfrak{U}$ mit der durch die Inklusion gegebenen teilweisen Ordnung versehen. $\boldsymbol{K}$ sei eine der als Beispiele a), b) und c) in 1.1.1 angeführten Kategorien. Wir nennen ein inverses System über $\mathfrak{U}$ mit Werten

[2]) Wir nennen eine Abbildung $u : A \to B$ *injektiv*, wenn aus $u(a) = u(a')$ $a = a'$ folgt, *surjektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $u(a) = b$ gibt, und *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

in $\boldsymbol{K}$ eine *Prägarbe auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$*, kurz eine *Prägarbe von Mengen, abelschen Gruppen bzw. Ringen auf X*. Eine Prägarbe ist also ein System $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U), r_U^V)$ von Objekten $\mathcal{F}(U) \in \boldsymbol{K}$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ und Morphismen $r_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für alle $U \subset V \in \mathfrak{U}$ mit $r_U^W = r_U^V \circ r_V^W$ für alle $U \subset V \subset W \in \mathfrak{U}$ und $r_U^U = e_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Abweichend von 1.1.1. schreiben wir hier $\mathcal{F}(U)$ anstelle von $\mathcal{F}_U$. Wir nennen einen Morphismus $u = (u_U) \in \prod_{U \in \mathfrak{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ des inversen Systems $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U), r_U^V)$ in das inverse System $\mathcal{G} = (\mathcal{G}(U), t_U^V)$ (s. 1.1.1.) einen *Morphismus der Prägarbe $\mathcal{F}$ in die Prägarbe $\mathcal{G}$*. Mit den so definierten Morphismen bildet die Klasse der Prägarben auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$ wieder eine Kategorie.

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$ heißt eine *Garbe*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

(F) *Ist $(U_\alpha) \subset \mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ und $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, so ist das System $(\mathcal{F}(U), r_{U_\alpha}^U, r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha})$ inverser Limes des aus $\mathcal{F}$ durch Beschränkung auf die Teilmenge $(U_\alpha, U_{\alpha\beta}) \subset \mathfrak{U}$ entstehenden inversen Systems über $(U_\alpha, U_{\alpha\beta})$.*

Beachtet man, daß sich in den von uns hier allein betrachteten Fällen von Kategorien des Typs a), b) und c) (1.1.1.) der inverse Limes des betrachteten inversen Systems allein aus den *Mengen* $\mathcal{F}(U_\alpha)$, $\mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$ und den zugehörigen Abbildungen zwischen diesen Mengen auf die am Ende von 1.1.1. angegebene Art bestimmen läßt, so erkennt man, daß die Eigenschaft (F) äquivalent ist mit den beiden Definitionseigenschaften einer Garbe in [8], chap. II, 1.1.

(F 1) Ist $(U_\alpha) \subset \mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ und $s, s' \in \mathcal{F}(U)$, so folgt aus $r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(s')$ für alle α $s = s'$.

(F 2) Ist $(U_\alpha) \subset \mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ und $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, dann gibt es zu jedem $(s_\alpha) \in \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha)$ mit $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_\beta)$ für alle α, β ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $r_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ für alle α.

(F 1) besagt gerade, daß der durch die Morphismen $r_{U_\alpha}^U, r_{U_{\alpha\beta}}^U$ gegebene Morphismus von $\mathcal{F}(U)$ in den wie am Ende von 1.1.1. konstruierten inversen Limes injektiv ist, (F 2) besagt, daß letzterer surjektiv ist. Daraus folgt aber in unseren Kategorien $\boldsymbol{K}$, daß er ein Isomorphismus ist.

Die Elemente s von $\mathcal{F}(U)$ ($\mathcal{F}(U)$ ist in unseren Fällen a), b) und c) stets eine Menge) nennt man *Schnitte* der Garbe $\mathcal{F}$ *über* U und schreibt auch $\Gamma(U, \mathcal{F})$ anstelle von $\mathcal{F}(U)$.

Für einen Punkt x unseres topologischen Raumes X betrachten wir das System $\mathfrak{U}(x)$ der offenen Mengen U mit $x \in U$. Umkehr der Enthaltenseinsrelation liefert auf $\mathfrak{U}(x)$ eine teilweise Ordnung, bei welcher $\mathfrak{U}(x)$ aufsteigend gefiltert ist. Einschränkung der Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $\mathfrak{U}(x)$ ergibt dann ein *direktes* System über $\mathfrak{U}(x)$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$. In unseren Kategorien existiert der direkte Limes $\varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$. Er wird mit $\mathcal{F}_x$ bezeichnet und *Faser* (über x) genannt.

Ist $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ ein Morphismus von Prägarben, so erhält man eindeutig einen Morphismus $u_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ (Funktoreigenschaft des direkten Limes): $\mathscr{F}\Rightarrow\mathscr{F}_x$, $u\Rightarrow u_x$ ist ein Funktor von der Kategorie der Prägarben auf X in die Kategorie $\boldsymbol{K}$. Für $s\in\mathscr{F}(U)$, $x\in U$ bezeichnet man das kanonische Bild von s in $\mathscr{F}_x$ mit s_x. s_x ist der *Keim* von s in x. Ist $\mathscr{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen oder Ringen, so nennt man die Menge der Punkte $x\in X$ mit $\mathscr{F}_x\neq(0)$ den *Träger* von $\mathscr{F}$: $\mathrm{Tr}(\mathscr{F})$. $\mathfrak{B}$ sei eine Basis der offenen Mengen $\mathfrak{U}$ von X. Mit der Inklusion als Ordnungsrelation ist $\mathfrak{B}$ wieder eine teilweise geordnete Menge. Ein inverses System $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$ nennen wir eine *Prägarbe $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$. $\mathscr{F}$ läßt sich erweitern zu einer Prägarbe $\mathscr{F}'$ auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$.* Man setzt für $U\in\mathfrak{U}$ $\mathscr{F}'(U)=\varprojlim_{V\in\mathfrak{B}}\mathscr{F}(V)$, wo $\mathfrak{B}=(V;\,V\in\mathfrak{B},\,V\subset U)$ ist. Für $U\in\mathfrak{B}$ erhält man so offenbar einen Isomorphismus $\mathscr{F}'(U)\cong\mathscr{F}(U)$. Die Morphismen $r'^{U}_{U'}$: $\mathscr{F}'(U)\to\mathscr{F}'(U')$ für $U'\subset U\in\mathfrak{U}$ ergeben sich aus der Definition des inversen Limes. Sind $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ zwei Prägarben über $\mathfrak{B}$ und $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ ein Morphismus von $\mathscr{F}$ in $\mathscr{G}$, das ist ein Morphismus des inversen Systems $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$ in das inverse System $\mathscr{G}$ über $\mathfrak{B}$, so liefert die Funktoreigenschaft des inversen Limes einen Morphismus $u':\mathscr{F}'\to\mathscr{G}'$ der erweiterten Prägarben $\mathscr{F}'$ und $\mathscr{G}'$. Ferner ist für $x\in X$ die Faser $\mathscr{F}'_x\cong\varinjlim_{x\in V\in\mathfrak{B}}\mathscr{F}(V)$.

Ist $\mathscr{F}$ eine *Garbe* auf X, $\mathscr{F}_1$ die durch Einschränkung auf $\mathfrak{B}$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}$ und $\mathscr{F}'_1$ die erweiterte Prägarbe auf X, so ist zufolge der Definitionseigenschaft (F) einer Garbe und der Eindeutigkeit des inversen Limes $\mathscr{F}'_1$ kanonisch isomorph zu $\mathscr{F}$.

Damit die einer Prägarbe $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$ zugeordnete erweiterte Prägarbe $\mathscr{F}'$ auf X eine Garbe ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(F_0) *Ist $U\in\mathfrak{B}$ und (U_α) eine Überdeckung von U durch Mengen $U_\alpha\in\mathfrak{B}$, $U_\alpha\subset U$, so ist für $\mathfrak{V}=(V;\,V\in\mathfrak{B},\,V\subset U_\alpha\cap U_\beta$ für ein Paar $(\alpha,\beta))$ das System $(\mathscr{F}(U),r^U_{U_\alpha},r^U_V)$ inverser Limes des aus $\mathscr{F}$ durch Beschränkung auf die Teilmenge $(U_\alpha)\cup\mathfrak{V}\subset\mathfrak{B}$ mit der Ordnungsrelation $U_\alpha>V$, wenn $U_\alpha\supset V$, entstehenden inversen Systems über $(U_\alpha)\cup\mathfrak{V}$.*

Zum Beweis mit den Eigenschaften des inversen Limes vgl. [*13*], chap. 0, 3.2.

Die folgende Bemerkung wird für uns später nützlich sein:

(F_0) *folgt aus der Bedingung*

(F'_0) *Zu jedem $U\in\mathfrak{B}$ gibt es eine (eventuell von U abhängige) Teilmenge $\mathfrak{V}'\subset\mathfrak{B}$, die eine Basis der offenen Mengen von U bildet und mit U_1, U_2 auch $U_1\cap U_2$ enthält, so daß die Aussage (F_0) für dieses U gilt, wenn in ihr überall $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{V}'$ ersetzt wird.* Wegen $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta\in\mathfrak{V}'$ ist hier natürlich $\varprojlim_{W\in(U_\alpha)\cup\mathfrak{B}}\mathscr{F}(W)$ kanonisch isomorph zu $\varprojlim_{W\in(U_\alpha,U_{\alpha\beta})}\mathscr{F}(W)$.

BEWEIS. Zunächst ist unter den Gegebenheiten von (F_0) der auf Grund der Definition des inversen Limes existierende kanonische Morphismus

$j: \mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W)$ ein Monomorphismus: Dazu sei $\mathfrak{B}'$ eine nach (F_0') zu U gewählte Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Dann gibt es $U'_{\alpha,\iota} \in \mathfrak{B}'$ mit $U_\alpha = \bigcup_\iota U'_{\alpha,\iota}$. Nun ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_{\alpha,\iota} U'_{\alpha,\iota}$ und für $\mathfrak{B}' = \{V'; V' \in \mathfrak{B}', V' \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\beta,\varkappa}$ für ein Paar $((\alpha,\iota),(\beta,\varkappa))\}$ nach (F_0') der kanonische Morphismus $i: \mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'} \mathscr{F}(W')$ ein Isomorphismus. Das System $(U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'$ ist eine „Verfeinerung" des Systems $(U_\alpha) \cup \mathfrak{B}$. Folglich läßt sich der kanonische Morphismus i über j: $\mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W)$ faktorisieren:

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{j} \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W) \xrightarrow{k} \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'} \mathscr{F}(W');$$

es ist $i = k \circ j$. i war ein Isomorphismus. Folglich ist j ein Monomorphismus, wie oben behauptet. Ferner ist k ein Epimorphismus. Um nun zu zeigen, daß j sogar ein Isomorphismus ist, womit (F_0) bewiesen ist, genügt es, noch zu zeigen, daß k ein Monomorphismus ist. Nun ist $U_\alpha = \bigcup_\iota U'_{\alpha,\iota}$, $U'_{\alpha,\iota} \in \mathfrak{B}$ und für $\mathfrak{B}_\alpha = \{V; V \in \mathfrak{B}, V \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa}$ für ein Paar $(\iota,\varkappa)\}$, $\mathfrak{B}'_\alpha = \{V', V' \in \mathfrak{B}', V' \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa}$ für ein Paar $(\iota,\varkappa)\}$ wegen $U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa} \in \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ in der Folge $\mathscr{F}(U_\alpha) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}'_\alpha} \mathscr{F}(W') \simeq \varprojlim_{W \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}_\alpha} \mathscr{F}(W)$ der letzte Morphismus ein Isomorphismus.

Der zusammengesetzte Morphismus ist nach dem bereits Bewiesenen angewandt auf U_α ein Monomorphismus. Folglich gilt dasselbe von

$$\mathscr{F}(U_\alpha) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}'_\alpha} \mathscr{F}(W')$$

für jedes α. Dann ist aber auch k monomorph.

1.1.3. *Direkte und reziproke Bilder* ([*13*], chap. 0, 3.4., 3.5., 3.7.). X und Y seien zwei topologische Räume, $\varphi: X \to Y$ eine stetige Abbildung. $\mathscr{F}$ sei wie in 1.1.2. eine Prägarbe auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$. Wir setzen für jede offene Menge $U \subset Y$ $\mathscr{G}(U) = \mathscr{F}(\bar{\varphi}^1(U))$ und für zwei offene Mengen $U \subset V \subset Y$ $s_U^V = r_{\bar{\varphi}^1(U)}^{\bar{\varphi}^1(V)}$: $\mathscr{F}(\bar{\varphi}^1(V)) \to \mathscr{F}(\bar{\varphi}^1(U))$. Das System $(\mathscr{G}(U), s_U^V)$ ist eine Prägarbe auf Y mit Werten in $\boldsymbol{K}$, die wir das *direkte Bild von* $\mathscr{F}$ *bei* φ nennen und mit $\varphi_*(\mathscr{F})$ bezeichnen. Ist $\mathscr{F}$ eine Garbe, so ist auch $\varphi_*(\mathscr{F})$ eine Garbe. Für zwei Prägarben $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ auf X und einen Morphismus $u: \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ liefert die Familie $(u_{\bar{\varphi}^1(U)})_U$, $u_{\bar{\varphi}^1(U)}: \mathscr{F}_1(\bar{\varphi}^1(U)) \to \mathscr{F}_2(\bar{\varphi}^1(U))$ einen Morphismus $\varphi_*(u): \varphi_*(\mathscr{F}_1) \to \varphi_*(\mathscr{F}_2)$: φ_* ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Prägarben (Garben) auf X in diejenige der Prägarben (Garben) auf Y. Ferner ist für stetige Abbildungen $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\varphi'} Z$ $(\varphi' \circ \varphi)_* = \varphi'_* \circ \varphi_*$. Für $x \in X$ hat man kanonische Morphismen der Fasern $\varphi_x: \varphi_*(\mathscr{F})_{\varphi(x)} \to \mathscr{F}_x$.

Ist $\mathscr{F}$ eine Prägarbe auf X und $\mathscr{G}$ eine Prägarbe auf Y, so heißt ein Morphismus $u: \mathscr{G} \to \varphi_*(\mathscr{F})$ ein *φ-Morphismus* von $\mathscr{G}$ in $\mathscr{F}$. Für $x \in X$ hat man dann kanonische Morphismen $\mathscr{G}_{\varphi(x)} \to F_x$.

X und Y seien wieder topologische Räume, $\varphi: X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf Y. Ein Paar $(\mathcal{G}', v)$ bestehend aus einer *Garbe* $\mathcal{G}'$ auf X und einem φ-Morphismus $v: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, also einem Morphismus $v: \mathcal{G} \to \varphi_*(\mathcal{G}')$, heißt ein *reziprokes Bild von* $\mathcal{G}$ *bei* φ, wenn für jede *Garbe* $\mathcal{F}$ auf X die für $u \in \mathrm{Hom}_X(\mathcal{G}', \mathcal{F})$ durch $u \to \varphi_*(u) \circ v \in \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, \varphi_*(\mathcal{F}))$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{G}', \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, \varphi_*(\mathcal{F}))$ bijektiv ist. Das Paar $(\mathcal{G}', v)$ ist, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $(\varphi^*(\mathcal{G}), v_{\mathcal{G}})$ bezeichnet, $v_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \to \varphi_*(\varphi^*(\mathcal{G}))$.

Für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ *von Mengen, Gruppen oder Ringen auf* Y *existiert ein reziprokes Bild* $\mathcal{G}'$ *bei* φ. Man erhält es folgendermaßen: Für offenes $U \subset X$ sei $\mathcal{G}'(U)$ die Menge bestehend aus allen Familien $s' = (s'_x)_{x \in U}$ mit $s'_x \in \mathcal{G}_{\varphi(x)}$ für alle $x \in U$, für die es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung V von $\varphi(x)$ in Y, eine Umgebung $W \subset \bar{\varphi}^1(V) \cap U$ von x und ein Element $s \in \mathcal{G}(V)$ mit $s'_z = s_{\varphi(z)}$ für jedes $z \in W$ gibt. Es ist klar, wie $\mathcal{G}'(U)$ noch mit der Struktur einer Gruppe bzw. eines Ringes zu versehen ist. Hinsichtlich des Nachweises, daß das so erhaltene $\mathcal{G}'$ ein reziprokes Bild von $\mathcal{G}$ bei φ ist, sei auf [*13*], chap. 0, 3.7. verwiesen. Daraus ergibt sich für das reziproke Bild $(\varphi^*(\mathcal{G}), v)$: Der kanonische Morphismus $\varphi_x \circ v_{\varphi(x)}: \mathcal{G}_{\varphi(x)} \to (\varphi^*(\mathcal{G}))_x$ ist ein Isomorphismus. Schließlich ist $\varphi^*(\mathcal{G})$ ein kovarianter Funktor in $\mathcal{G}$.

SPEZIALFÄLLE. Ist $\varphi = \mathrm{Id}: X \to X$ die identische Abbildung, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, so heißt $\mathrm{Id}^*(\mathcal{F})$ die *der Prägarbe* $\mathcal{F}$ *zugeordnete* oder auch von ihr erzeugte *Garbe*. Ist $X \subset Y$, $j: X \to Y$ die kanonische Injektion und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y, so nennt man $j^*(\mathcal{G})$ die auf X induzierte Garbe. Sie wird auch mit $\mathcal{G}|X$ bezeichnet.

1.1.4. *Geringte Räume* ([*13*], 4.1., 4.2.). Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{A}$ auf X. $\mathcal{A}$ heißt die *Strukturgarbe* des Raumes und wird auch mit $\mathcal{O}_X$ bezeichnet, ihre Fasern in $x \in X$ mit $\mathcal{O}_{X,x}$ bzw. $\mathcal{O}_x$. Ein *Morphismus* $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar $(\varphi, \theta) = f$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $\varphi: X \to Y$ und einem φ-Morphismus $\theta: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, d.h. einem Morphismus $\theta: \mathcal{B} \to \varphi_*(\mathcal{A})$ der Garben von Ringen auf Y. Die geringten Räume mit diesen Morphismen bilden eine Kategorie. In ihr ist z.B. $f = (\varphi, \theta)$ ein Monomorphismus, wenn φ eine stetige injektive Abbildung und $\theta: \mathcal{B} \to \varphi_*(\mathcal{A})$ ein Epimorphismus der Garben von Ringen auf Y ist. Dabei heißt ein Morphismus $f: X \to Y$ in einer beliebigen Kategorie *monomorph*, wenn für jedes Objekt T der Kategorie die für $u \in \mathrm{Hom}(T, X)$ durch $u \to f \circ u \in \mathrm{Hom}(T, Y)$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}(T, X) \to \mathrm{Hom}(T, Y)$ injektiv ist. Dual dazu wird der Begriff des Epimorphismus definiert.

Für eine Teilmenge $M \subset X$ ist $(M, \mathcal{A}|M)$ ein geringter Raum, auf M *induziert* durch $(X, \mathcal{A})$. Man hat einen Monomorphismus $(M, \mathcal{A}|M) \to (X, \mathcal{A})$, die kanonische *Injektion*.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein geringter Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X heißt ein $\mathcal{A}$-*Modul*, wenn für jedes offene $U \subset X$ die abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ die Struktur eines $\mathcal{A}(U)$-Moduls trägt, so daß für alle offenen $U \subset V \subset X$

die Homomorphismen $r_U^V: \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ mit den Ringhomomorphismen $\mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$ verträgliche Modulhomomorphismen sind. Sind $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{A}$-Moduln auf X, so heißt ein Morphismus $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ der Garben von abelschen Gruppen auf X ein *$\mathcal{A}$-Homomorphismus*, wenn für jedes offene $U \subset X$ der Homomorphismus $u_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ $\mathcal{A}(U)$-linear ist. Die Menge aller dieser $\mathcal{A}$-Homomorphismen $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ wird mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnet. Die $\mathcal{A}$-Moduln mit den $\mathcal{A}$-Homomorphismen als Morphismen bilden eine Kategorie.

$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ seien zwei geringte Räume, $f = (\varphi, \theta): (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ ein Morphismus. θ ist ein Morphismus $\mathcal{B} \to \varphi_*(\mathcal{A})$ der Garben von Ringen. Mit $\mathcal{F}$ als $\mathcal{A}$-Modul auf X ist dann $\varphi_*(\mathcal{F})$ ein $\varphi_*(\mathcal{A})$-Modul auf Y und vermöge $\theta: \mathcal{B} \to \varphi_*(\mathcal{A})$ wird $\varphi_*(\mathcal{F})$ zu einem $\mathcal{B}$-Modul. Letzterer wird *direktes Bild von $\mathcal{F}$ bei dem Morphismus f* genannt und mit $f_*(\mathcal{F})$ bezeichnet. f_* ist ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der $\mathcal{A}$-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{B}$-Moduln.

$\mathcal{G}$ sei ein $\mathcal{B}$-Modul. $\varphi^*(\mathcal{G})$ ist zunächst eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Die Definition der Schnitte von $\varphi^*(\mathcal{G})$ und $\varphi^*(\mathcal{B})$ in 1.1.3. liefert aber eine natürliche $\varphi^*(\mathcal{B})$-Modulstruktur von $\varphi^*(\mathcal{G})$. Andererseits hat man vermöge $\theta: \mathcal{B} \to \varphi_*(\mathcal{A})$ nach Definition des reziproken Bildes einen Morphismus $\theta^*: \varphi^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{A}$, vermöge dessen $\mathcal{A}$ ein $\varphi^*(\mathcal{B})$-Modul wird. Bildung des Tensorproduktes ([8], chap. II, 2.8.) $\varphi^*(\mathcal{G}) \underset{\varphi^*(\mathcal{B})}{\otimes} \mathcal{A}$ ergibt daher einen $\mathcal{A}$-Modul, der als *reziprokes Bild von $\mathcal{G}$ bei dem Morphismus f* und mit $f^*(\mathcal{G})$ bezeichnet wird. Es ist $(f^*(\mathcal{G}))_x = \mathcal{G}_{\varphi(x)} \underset{\mathcal{B}_{\varphi(x)}}{\otimes} \mathcal{A}_x$. f^* ist ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der $\mathcal{B}$- in diejenige der $\mathcal{A}$-Moduln. Ferner hat man eine kanonische *Isomorphie* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f^*(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F}))$.

1.2. Schemata

1.2.1. *Affine Schemata* ([13], chap. I, §1, [4], chap. 3, 1., [7], exp. 1., 2.). Wir gehen aus von einem Ring A und versehen die Menge $X = \mathrm{Spec}(A) = (\mathfrak{p}; \mathfrak{p}$ Primideal von $A)$, deren Elemente mit x, die zugehörigen Primideale mit $\mathfrak{p}_x$ bezeichnet werden, mit der Zariski-Topologie: Eine Basis $\mathfrak{B}$ derselben bilden die Mengen $D(f) = \{x;\ x \in X,\ f(x) \neq 0\}$ für alle $f \in A$. Dabei bedeutet $f(x) \neq 0$: $f \notin \mathfrak{p}_x$. Es gilt $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Mit $A_f = A_{S_f}$, dem Quotientenring von A nach der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S_f = (f^n;\ n \geqq 0)$, und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f: A_f \to A_g$ für $D(f) \supset D(g)$ (vgl. [13], chap. I, 1.3.) erhält man eine Prägarbe von Ringen über $\mathfrak{B}$ (1.1.2.). Die letztere erfüllt die Bedingung (F_0) aus 1.1.2. Dies ergibt sich aus einfachen Eigenschaften der Quotientenbildung ([13], chap. I, 1.3.7.). Erweiterung auf X liefert somit nach 1.1.2. eine Garbe $\tilde{A}$ von Ringen auf X mit $\Gamma(D(f), \tilde{A}) = A_f$ für alle $f \in A$. Das Paar $(X, \tilde{A})$ heißt das zu A gehörige *affine Schema*. Einschränkung auf die offene Menge $D(f)$ liefert einen zum affinen Schema des Ringes A_f kanonisch isomorphen geringten Raum. Die $D(f)$ heißen daher auch *spezielle offene affine Teilmengen* des affinen Schemas (X, A). Allgemein

heißt eine offene Menge U eines geringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ *offene affine Teilmenge* von $(X, \mathcal{O}_X)$, wenn $(U, \mathcal{O}_X | U)$ isomorph einem affinen Schema ist.

M sei ein A-Modul. Bildet man entsprechend wie oben für $f \in A$ die Quotientenmoduln M_f, so erhält man A_f-Moduln und für $D(f) \supset D(g)$ kanonische Modulhomomorphismen: Wie oben bildet das so entstehende System von Moduln und Homomorphismen über $\mathfrak{B}$ eine *Garbe über* $\mathfrak{B}$, aus der durch Erweiterung eine Garbe von $\tilde{A}$-Moduln auf X entsteht. Letztere ist ein $\tilde{A}$-Modul und wird mit $\tilde{M}$ bezeichnet. Der zu dem A_f-Modul M_f gehörige $\tilde{A}_f$-Modul $\tilde{M}_f$ über $D(f)$ ist kanonisch isomorph zu der Einschränkung $\tilde{M} | D(f)$.

Sind M, N zwei A-Moduln und $u: M \to N$ ein A-Homomorphismus, dann gehören zu u für alle $f \in A$ kanonisch A_f-Homomorphismen $u_f: M_f \to N_f$, und für $D(f) \supset D(g)$ hat man kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{u_f} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_g & \xrightarrow{u_g} & N_g \end{array}$$

Man erhält so einen $\tilde{A}$-Homomorphismus $\tilde{u}: \tilde{M} \to \tilde{N}$, und es gilt:

Der kanonische Homomorphismus $u \to \tilde{u}$ *von* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *in* $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ *ist bijektiv* ([13], chap. I, 1.3.8.).

In dem Wort „Homomorphismus" kommt zum Ausdruck, daß $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ eine abelsche Gruppe ist. In der Tat: Sei $(X, \mathcal{C})$ ein geringter Raum (1.1.4.), $\mathfrak{B}$ eine Basis der offenen Mengen von X und $\boldsymbol{K}$ die Kategorie der *Prägarben von* $\mathcal{O}$*-Moduln über* $\mathfrak{B}$ (1.1.2. und 1.1.4.) mit den $\mathcal{C}$-Homomorphismen als Morphismen. Dann gilt folgendes: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist eine abelsche Gruppe für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \boldsymbol{K}$, und die Zusammensetzung (1.1.1. und 1.1.2.) der Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ ist bilinear für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \boldsymbol{K}$. Ferner existiert ein 0-Objekt 0 mit $e_0 = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$. Eine Kategorie mit diesen Eigenschaften heißt eine *additive Kategorie*. Während man für eine beliebige Kategorie erklären kann, was ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist (s. 1.1.4.), kann man für eine additive Kategorie *Kern, Kokern, Bild und Kobild* erklären: Ein Kern des Morphismus $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Monomorphismus $i: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft: Genau diejenigen $v: \mathcal{X} \to \mathcal{F}$ mit $u \circ v = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ lassen sich über i faktorisieren: $v = i \circ w$ mit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}')$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{F} & \xrightarrow{u} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle w}\uparrow & \nearrow_{v} & & & \\ \mathcal{X} & & & & \end{array}$$

Äquivalent damit ist: Ein Kern von $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Morphismus $i: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, so daß für jedes $\mathcal{X} \in \boldsymbol{K}$ die Folge von *abelschen Gruppen* $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ exakt ist. Ein Kern ist, wenn er existiert, im wesentlichen eindeutig bestimmt. Dual dazu definiert man Kokern und damit Bild und Kobild (vgl. [9], chap. I, 1.3., 1.4., [8], chap. I, 1.8.).

Wir wollen nun in der Kategorie $\boldsymbol{K}$ der Prägarben von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ die Frage nach dem Kern eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ stellen: Nach 1.1.2. ist $u=(u_U)_{U\in B}$, $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ mit

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{u_U} & \mathcal{G}(U)\\ \downarrow{\scriptstyle r_V^U} & & \downarrow{\scriptstyle s_V^U}\\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{u_V} & \mathcal{G}(V)\end{array}$$

kommutativ für alle $V\subset U\in\mathfrak{B}$. Wir betrachten nun die Kerne $\mathcal{F}'(U)$ von $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ für alle $U\in\mathfrak{B}$ und erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}0\longrightarrow\mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{i_U} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{u_U} & \mathcal{G}(U)\\ \downarrow{\scriptstyle r'^U_V} & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} & & \downarrow{\scriptstyle s_V^U}\\ 0\longrightarrow\mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{i_V} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{u_V} & \mathcal{G}(V)\end{array}$$

mit exakten Zeilen.

Das System $(\mathcal{F}'(U), r'^U_V)$ von $\mathcal{O}(U)$-Moduln und Homomorphismen ist eine Prägarbe von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ und $i=(i_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ ist ein $\mathcal{O}$-Homomorphismus $i:\mathcal{F}'\to\mathcal{F}$. i ist ein Kern von $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$: Für jeden $\mathcal{O}$-Homomorphismus $v:\mathcal{X}\to\mathcal{F}$ mit $u\circ v=0$ hat man kommutative Diagramme (1) und $u_U\circ v_U=0$ für alle $U\in\mathfrak{B}$. Da $\mathcal{F}'(U)$ Kern des $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismus $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ ist, gibt es $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismen $w_U:\mathcal{X}(U)\to\mathcal{F}'(U)$ mit $v_U=i_U\circ w_U$ für alle $U\in\mathfrak{B}$. Aus der Kommutativität der Diagramme (1) ergibt sich die Kommutativität der gestrichelten Diagramme in (2) und somit die Existenz eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $w:\mathcal{X}\to\mathcal{F}'$ mit $v=i\circ w$.

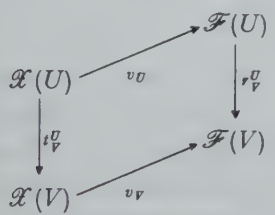

Abb. 1

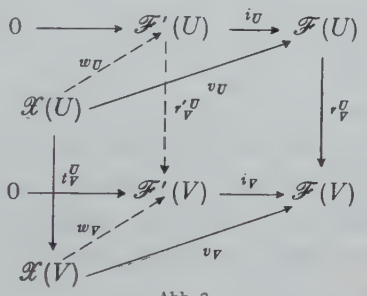

Abb. 2

Somit gilt: In der Kategorie $\boldsymbol{K}$ der (Prägarben von) $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ hat jeder $\mathcal{O}$-Homomorphismus einen Kern und dual dazu einen Kokern. Ferner ist der kanonische $\mathcal{O}$-Homomorphismus $\bar{u}:\mathrm{Kobild}\,u\to\mathrm{Bild}\,u$ ein Isomorphismus. Eine additive Kategorie mit diesen beiden Eigenschaften heißt eine *abelsche Kategorie* ([9], chap. I, 1.4., [8], chap. I, 1.8.). In einer additiven, speziell also in einer abelschen Kategorie ist erklärt, wann eine Folge von Objekten und Morphismen $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ eine *exakte Folge* heißt.

Betrachtet man anstelle der Prägarben $\boldsymbol{K}$ die *Garben von $\mathcal{O}$-Moduln über* $\mathfrak{B}$, so bilden diese mit denselben Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ wie in $\boldsymbol{K}$

jedenfalls eine additive Kategorie $\boldsymbol{K}'$, eine *Unterkategorie* von $\boldsymbol{K}$. Für einen $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}\in\boldsymbol{K}'$, ist nun der oben *in* $\boldsymbol{K}$ gebildete Kern und Kokern nicht notwendig wieder in $\boldsymbol{K}'$ enthalten. Ist dies jedoch der Fall, so sind Kern und Kokern in $\boldsymbol{K}$ zugleich Kern und Kokern von $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ *in* $\boldsymbol{K}'$. Gilt dies für alle $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}\in\boldsymbol{K}'$, so ist $\boldsymbol{K}'$ sicher ebenfalls abelsch. Da nach 1.1.2. eine natürliche Äquivalenz ([9], chap. I, 1.2.) zwischen der Kategorie der *Garben von $\mathcal{O}$-Moduln auf X* und der Kategorie der Garben von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ besteht, kann man im angegebenen Falle den Kern und dual dazu den Kokern eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ wie oben bestimmen.

1.2.2. *Quasi-kohärente Garben. Die Funktoren $M\Rightarrow\tilde{M}$, $u\Rightarrow\tilde{u}$ und $\tilde{M}\Rightarrow\tilde{M}(X)=\Gamma(X,\tilde{M}), \tilde{u}\Rightarrow\tilde{u}_X$ liefern eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der A-Moduln M und der Unterkategorie der Kategorie der $\tilde{A}$-Moduln auf X bestehend aus den $\tilde{A}$-Moduln von der Form $\tilde{M}$, M ein A-Modul, und den Morphismen der Kategorie der $\tilde{A}$-Moduln.*

Diese Unterkategorie ist, da äquivalent zur Kategorie der A-Moduln, eine abelsche Kategorie, *die Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der quasi-kohärenten (abgekürzt q.k.) Garben auf $(X, \tilde{A})$*.

Ist für $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$, $\tilde{M}, \tilde{N}\in\boldsymbol{K}''$, der Morphismus $\tilde{i}:\tilde{M}'\to\tilde{M}$ ein Kern von $\tilde{u}$ in $\boldsymbol{K}''$, so braucht $\tilde{i}$ a priori nicht auch Kern von $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$ in der größeren Kategorie $\boldsymbol{K}'$ aller $\tilde{A}$-Moduln zu sein. Daß dies hier jedoch der Fall ist, sieht man so: Wir betrachten die Basis $\mathfrak{B}$ der offenen Mengen von X bestehend aus den speziellen offenen affinen Teilmengen $D(f)$, $f\in A$, von $(X, \tilde{A})$. Auf Grund der oben genannten Äquivalenz ist $0\to M'\xrightarrow{i} M\xrightarrow{u} N$ eine exakte Folge von A-Moduln. Dann ist aber auch $0\to M'_f\xrightarrow{i_f} M_f\xrightarrow{u_f} N_f$ eine exakte Folge von A_f-Moduln für jedes $f\in A$, also nach 1.2.1. die durch $\left(M'_f, r^f_g \text{ für } D(f)\supset D(g)\right)$ gegebene Garbe von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ mit den natürlichen A_f-Homomorphismen $i_f:M'_f\to M_f$ ein Kern von $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$ in der Kategorie der Garben von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}$. Letztere ist jedoch nach 1.1.2. kanonisch äquivalent zur Kategorie der Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf X. Entsprechendes gilt für den Kokern.

Ist $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ eine exakte Folge von q.k. Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf $(X, \tilde{A})$ und U offen in X, so ist die eingeschränkte Folge $0\to\mathcal{F}'|U\to\mathcal{F}|U\to\mathcal{G}|U$ eine exakte Folge von $\tilde{A}|U$-Moduln auf U. Dazu sei $\mathfrak{B}'$ die Basis der offenen Mengen von U bestehend aus den speziellen offenen affinen Mengen $D(f)$, $f\in A$, mit $D(f)\subset U$. Einschränkung der Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf $\mathfrak{B}'$ liefert, da wir von q.k. Garben ausgingen, eine exakte Folge von Garben von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}'$. Erweiterung auf U ergibt dann das Gewünschte (vgl. 1.1.2.). Entsprechendes gilt für exakte Folgen der Gestalt $\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}'\to 0$ und damit für beliebige kurze exakte Folgen $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''\to 0$.

Der unser affines Schema $(X, \tilde{A})$ definierende Ring A sei nun *noethersch.* V sei offen in X und $\mathfrak{F}$ ein $\tilde{A}|V$-Modul. *Dann sind äquivalent*

(*i*) *Es existiert eine q.k. Garbe* $\mathfrak{G}$ *auf* X *mit* $\mathfrak{G}|V \simeq \mathfrak{F}$.

(*ii*) *Es existiert eine offene Überdeckung* (U_i) *von* V *durch Mengen* $U_i = D(f_i)$, $f_i \in A$, $D(f_i) < V$, *so daß* $\mathfrak{F}|U_i$ *q.k. ist* (U_i *ist affin*!).

(*iii*) *Jeder Punkt* $x \in V$ *ist in einer offenen affinen Menge* $U < X$ *enthalten, für welche* $\mathfrak{F}|U$ *q.k. ist.*

(*iv*) *1. Für jedes* $f \in A$ *mit* $D(f) < V$ *und jedes* $s \in \Gamma(D(f), \mathfrak{F})$ *existiert ein* $n \geqq 0$, *so daß* $f^n s$ *sich zu einem Schnitt von* $\mathfrak{F}$ *über* V *fortsetzen läßt.*

2. Für jedes $f \in A$ *mit* $D(f) < V$ *und jedes* $t \in \Gamma(V, \mathfrak{F})$, *so daß* $t|D(f) = r^V_{D(f)}(t) = 0$, *existiert ein* $n \geqq 0$ *mit* $f^n t = 0$.

Beweis. [*13*], chap. I, 1.4.

Eine Garbe von $\tilde{A}|V$-Moduln heißt *quasi-kohärent* (abgekürzt q.k.) *auf* V, wenn (i) bis (iv) erfüllt sind. (i) zeigt: Ist $\mathfrak{F}$ q.k. auf V und $U < V$, so ist auch $\mathfrak{F}|U$ q.k. auf U. (iii) zeigt: Quasi-Kohärenz ist eine lokale Eigenschaft.

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für eine offene affine Überdeckung* $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ *für alle* α *die eingeschränkten Folgen* $0 \to \mathfrak{F}'|U_\alpha \to \mathfrak{F}|U_\alpha \to \mathfrak{F}''|U_\alpha \to 0$ *von* $\tilde{A}|U_\alpha$*-Moduln exakt sind.*

Beweis. Wie oben bei der Einschränkung von exakten Folgen auf eine offene Menge $U < X$ mit folgender Basis der offenen Mengen von X: $\mathfrak{B}$ besteht aus allen $D(f)$, $f \in A$, mit $D(f) < U_\alpha$ für ein α. — Ebenso ergibt sich:

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für alle* U_α *einer offenen affinen Überdeckung* $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ *bzw. wenn für alle offenen affinen* $U < X$ *die zugehörigen Folgen der Schnittflächenmoduln* $0 \to \mathfrak{F}'(U_\alpha) \to \mathfrak{F}(U_\alpha) \to \mathfrak{F}''(U_\alpha) \to 0$ *bzw.* $0 \to \mathfrak{F}'(U) \to \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}''(U) \to 0$ *exakt sind.*

Ist $\mathfrak{F} \simeq \tilde{M}$ q.k. auf X, so ist nach bekannten Eigenschaften der Quotientenbildung ([*13*], chap. 0, 1.4.5.) die Faser $\mathfrak{F}_x \sim M_{\mathfrak{p}_x}$ ($M_{\mathfrak{p}_x}$ ist der Quotientenmodul von M nach dem Primideal $\mathfrak{p}_x < A$, also $M_{\mathfrak{p}_x} = M_S$ mit $S = A - \mathfrak{p}_x$). *Daher ist* $\mathfrak{F} = 0$ *äquivalent mit* $\mathfrak{F}_x = 0$ *für alle* $x \in X$.

Beweis. Ist $\mathfrak{F} \neq 0$, so ist $M \neq (0)$, also für ein Element $m \neq 0$ aus M $1 \notin \mathrm{Ann}(m)$[3]). Dann gibt es aber ein $\mathfrak{p}_x > \mathrm{Ann}(m)$, woraus $\frac{m}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{p}_x} \sim \mathfrak{F}_x$ folgt. Damit ergibt sich:

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für alle* $x \in X$ *die zugehörigen Folgen der Fasern* $0 \to \mathfrak{F}'_x \to \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{F}''_x \to 0$ *exakt sind.*

A sei wieder ein *noetherscher Ring.* Eine q.k. Garbe $\mathfrak{F}$ auf dem affinen Schema $(X, \tilde{A})$ heißt *kohärent* (abgekürzt k.), wenn es einen endlich erzeugten A-Modul M gibt, so daß $\mathfrak{F} \simeq \tilde{M}$.

[3]) $\mathrm{Ann}(m)$ bezeichnet den Annulator des Elementes m, ein Ideal in A.

V sei eine offene Menge von X, $\mathscr{F}$ ein $\tilde{A}|V$-Modul. *Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine k. Garbe $\mathscr{G}$ auf X mit $\mathscr{G}|V \simeq \mathscr{F}$.

(ii) Jeder Punkt $x \in V$ ist in einer offenen affinen Menge $U \subset V$ enthalten, für welche $\mathscr{F}|U$ k. auf U ist.

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung (i) ist $\mathscr{G} \simeq \tilde{M}$, M ein endlich erzeugter A-Modul. Für $x \in D(f) \subset V$, $f \in A$, ist dann $\mathscr{F}|D(f) \simeq \tilde{M}|D(f) \sim \widetilde{M_f}$, und M_f ist ein endlich erzeugter A_f-Modul, also $\mathscr{F}|D(f)$ kohärent.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $V = \bigcup_i U_i$ sei eine endliche offene affine Überdeckung von V mit $\mathscr{F}|U_i$ kohärent, d.h. $\mathscr{F}|U_i \simeq \tilde{M}_i$, M_i endlich erzeugter $\tilde{A}(U_i)$-Modul. Nun ist nach Obigem $\mathscr{F}$ q.k., also $\mathscr{F} \simeq \tilde{M}|V$, M ein A-Modul und $M = \varinjlim M_\lambda$, M_λ endlich erzeugte A-Moduln. Dann ist $\varinjlim \tilde{M}_\lambda \sim \tilde{M}$ und wegen der Vertauschbarkeit von direktem Limes und Quotientenbildung ([13], chap. 0, 1.3.) $\mathscr{F}|U_i \sim \tilde{M}|U_i \simeq \varinjlim \tilde{M}_\lambda|U_i$. Ist nämlich $\mathfrak{B}$ die aus den $D(f)$, $f \in A$, bestehende Basis der offenen Mengen von X, so ist für jedes $U = D(f) \in \mathfrak{B}$ $\tilde{M}(U) = M_f = \varinjlim (M_\lambda)_f = \varinjlim \tilde{M}_\lambda(U)$. Folglich ist die durch Einschränkung von $\tilde{M}$ auf $\mathfrak{B}$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}$ direkter Limes der Prägarben $\tilde{M}_\lambda$ über $\mathfrak{B}$. Mit $\mathfrak{B}_i = (U;\ U \in \mathfrak{B},\ U \subset U_i)$ ist somit auch die durch Einschränkung von $\tilde{M}$ auf $\mathfrak{B}_i$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}_i$ direkter Limes der durch Einschränkung der $\tilde{M}_\lambda$ auf $\mathfrak{B}_i$ entstehenden Prägarben über $\mathfrak{B}_i$. Die Prägarben sind aber sämtlich Garben über $\mathfrak{B}_i$ (sie erfüllen (F_0) aus 1.1.2.), und die Kategorie der Garben über $\mathfrak{B}_i$ ist äquivalent zur Kategorie der Garben auf U_i. Folglich ist $\tilde{M}|U_i$ direkter Limes der Garben $\tilde{M}_\lambda|U_i$. Die U_i sind nun affin, die $\tilde{M}$, $\tilde{M}_\lambda$ q.k. Vermöge $i_\lambda: M_\lambda \to M$ hat man $\tilde{i}_\lambda: \tilde{M}_\lambda \to \tilde{M}$ und somit $\tilde{M}_\lambda(U_i) \to \tilde{M}(U_i)$. Dies sind Monomorphismen, und wegen $\varinjlim \tilde{M}_\lambda|U_i \simeq \tilde{M}|U_i$ ist $\varinjlim \tilde{M}_\lambda(U_i) = \tilde{M}(U_i)$. Aus $\tilde{M}(U_i) \simeq M_i$ endlich erzeugter $A(U_i)$-Modul folgt aber $0 \to \widetilde{M}_{\lambda_i}(U_i) \to \tilde{M}(U_i) \to 0$ für ein λ_i und folglich $0 \to \tilde{M}_{\lambda_0}|U_i \to \tilde{M}|U_i \to 0$ für ein λ_0 und alle i. Wegen $V = \bigcup_i U_i$ gilt somit $0 \to \tilde{M}_{\lambda_0}|V \to \tilde{M}|V \to 0$, also $\tilde{M}_{\lambda_0}|V \simeq \tilde{M}|V \sim \mathscr{F}$ q.e.d.

Als Folgerung ergibt sich: Für alle offenen affinen $U \subset X$ ist $\tilde{A}(U) = \Gamma(U;\tilde{A})$ noethersch. Ist nämlich $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\tilde{A}(U)$, also $0 \to \mathfrak{i} \to \tilde{A}(U)$, und $U = \bigcup_i U_i$, $U_i = D(f_i)$, $f_i \in A$, so sind die Ringe $\tilde{A}(U_i) \simeq A_{f_i}$ noethersch, und wegen $0 \to \tilde{\mathfrak{i}}(U_i) \to \tilde{A}(U_i)$ ist $\tilde{\mathfrak{i}}(U_i)$ endlich erzeugter $\tilde{A}(U_i)$-Modul. Somit sind die Einschränkungen $\tilde{\mathfrak{i}}|U_i$ kohärent, woraus die Kohärenz von $\tilde{\mathfrak{i}}$ auf U folgt. $\mathfrak{i}$ ist also endlich erzeugter $\tilde{A}(U)$-Modul.

1.2.3. *Präschemata, Kategorie der quasi-kohärenten Garben.* Ein *Präschema*[4]) ist ein geringter Raum $(X, \mathscr{O}_X)$, der sich durch *endlich* viele offene affine Mengen, die zu *noetherschen* Ringen gehören, überdecken läßt.

[4]) Abweichend von der Terminologie bei GROTHENDIECK [13]. Ein Präschema in unserem Sinne heißt dort „noethersches Präschema".

$(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ seien zwei Präschemata. Ein Morphismus $f=(\varphi, \theta)$: $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ (1.1.4.) heißt *Morphismus der Präschemata*, wenn für alle $x \in X$ die zugehörigen Homomorphismen $\theta_x^{\#}: \mathcal{O}_{\varphi(x)} \to \mathcal{O}_x$ der Fasern *lokal* sind, d.h. wenn für die maximalen Ideale $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}$ von $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$ und $\mathfrak{m}_x$ von $\mathcal{O}_x$ $\theta_x^{\#}(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$ gilt. Mit den so definierten Morphismen bilden die Präschemata eine Kategorie.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Präschema, $(S, \mathcal{O}_S)$ ein affines Schema zum Ring A, dann entsprechen sich eineindeutig die Morphismen $(X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ und die Ringhomomorphismen $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ([*13*], chap. I, 2.2.).

Eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X heißt *quasi-kohärent* bzw. *kohärent* (q.k. bzw. k.), wenn sie einer der drei äquivalenten Bedingungen genügt:

(i) Es existiert eine endliche Überdeckung von X durch offene affine Mengen U_α, so daß $\mathcal{F}|U_\alpha$ q.k. bzw. k. ist für alle α.

(ii) Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene affine Umgebung U mit $\mathcal{F}|U$ q.k. bzw. k.

(iii) Für jede offene affine Menge $U \subset X$ ist $\mathcal{F}|U$ q.k. bzw. k.

Die Äquivalenz der drei Bedingungen folgt unmittelbar aus 1.2.2.

Wir betrachten nun die Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X. Dazu sei $\mathfrak{B}$ *die aus allen offenen affinen* $U \subset X$ *bestehende Basis* der offenen Mengen von X. Dann genügt es, die q.k. Garben über $\mathfrak{B}$ zu betrachten (1.1.2.). Quasi-Kohärenz von $\mathcal{F}$ bedeutet:

(Q) *Für jedes* $U \in \mathfrak{B}$ *und* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$ *gilt mit* $\Gamma(U, \mathcal{F}) = M$ $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = M_f$, *und es ist für* $D(f) \supset D(g)$, $f, g \in A$, $r_{D(g)}^{D(f)}: \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \to \Gamma(D(g), \mathcal{F})$ *der kanonische Homomorphismus* $M_f \to M_g$.

Wir zeigen nun: *Die Kategorie* $\boldsymbol{K}''$ *der q.k. Garben auf* X *ist eine abelsche Kategorie.*

Dazu bilden wir Kern $\mathcal{F}'$ und Kokern $\mathcal{F}''$ eines Morphismus $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \boldsymbol{K}''$, in der größeren Kategorie $\boldsymbol{K}$ der *Prägarben* (von $\mathcal{O}_X$-Moduln) *über* $\mathfrak{B}$ wie in 1.2.1. Da für alle $U \in \mathfrak{B}$ und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ aus $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ exakt $0 \to \mathcal{F}'(U)_f \to \mathcal{F}(U)_f \to \mathcal{G}(U)_f$ exakt folgt, erfüllen auch die Prägarben $\mathcal{F}'$ bzw. $\mathcal{F}''$ über $\mathfrak{B}$ die Bedingung (Q). Daraus folgt aber nach 1.2.1.: $\mathcal{F}'$ bzw. $\mathcal{F}''$ erfüllen (F_0') aus 1.1.2.: Man nehme für $U \in \mathfrak{B}$ als Menge $\mathfrak{B}'$ die Menge der speziellen offenen affinen Mengen $D(f)$ für alle $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Damit sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ Garben über $\mathfrak{B}$, also aus $\boldsymbol{K}''$, und somit Kern und Kokern von $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\boldsymbol{K}''$. Die obige Behauptung ist somit bewiesen.

Gleichzeitig hat sich ergeben: *Die in* 1.2.2. *angegebenen Kriterien für die Exaktheit einer Folge* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *gelten unverändert für ein Präschema* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Die *kohärenten Garben* auf X bilden eine abelsche Unterkategorie der Kategorie der q.k. Garben mit folgender Eigenschaft: Sind $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ q.k. und ist $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exakt, so ist mit zweien der $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ auch die dritte Garbe kohärent.

(A) *In der Kategorie* $\boldsymbol{K}''$ *der q.k. Garben, auf die wir uns im folgenden immer beschränken wollen, existieren direkte Limites beliebiger direkter Systeme* $(\mathcal{F}_i, u_j^i)$ (1.1.1.).

BEWEIS. Für $U \in \mathfrak{B}$ bilde man $\mathscr{F}(U) = \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$. Man erhält so eine Prägarbe $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$. $\mathscr{F}$ erfüllt aber wegen der Vertauschbarkeit von Quotientenbildung und direkten Limites ([13], chap. 0, 1.3.) die obige Bedingung (Q) und ist somit eine q.k. Garbe über $\mathfrak{B}$. Also ist $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_i$ in $\boldsymbol{K}''$.

(B) *Ist J eine teilweise geordnete aufsteigend gefilterte Menge, so ist der Funktor $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i$ ein exakter Funktor* (vgl. [3], chap. II, 4.) *von der Kategorie der direkten Systeme $(\mathscr{F}_i, u_i^j)$ über J mit Werten in $\boldsymbol{K}''$ in die Kategorie $\boldsymbol{K}''$.*

BEWEIS. Dies ergibt sich mit der unter (A) angegebenen Konstruktion von $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i$ über $\mathfrak{B}$ aus der Tatsache, daß $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i(U)$ in der Kategorie der $\mathcal{O}(U)$-Moduln ein exakter Funktor für alle $U \in \mathfrak{B}$ ist.

Mit einfachen Fortsetzungssätzen für q.k. Garben ([13], chap. I, 9.4.) ergibt sich ([13], chap. I, 9.4.9.):

Jede q.k. Garbe auf einem Präschema X ist direkter Limes von kohärenten Untergarben.

Da die Klassen von Typen kohärenter Garben auf X eine Menge bilden und in einer abelschen Kategorie direkte Limites sich stets als Quotientenobjekte direkter Summen ergeben ([9], chap. I, 1.8.), gilt:

(C) *Es existiert eine Familie $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ von kohärenten Garben $\mathscr{F}_i$ auf X, so daß für jede q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X ein Epimorphismus $u: \left(\bigoplus_{i \in I} \mathscr{F}_i\right)^J \to \mathscr{F}$* [5]) *existiert* ($\bigoplus_{i \in J} \mathscr{F}_i$ *ist dann ein Generator der Kategorie $\boldsymbol{K}''$ im Sinne von* ([9], chap. I, 1.9.)).
Jede aufsteigende Folge von q.k. Untergarben von $\mathscr{F}_i$ ist stationär.

(A) bis (C) sind gerade die Eigenschaften einer abelschen Kategorie, die in [6] einer allgemeinen Theorie der *injektiven Objekten in abelschen Kategorien* zugrundegelegt werden. Insbesondere existieren also in unserer Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X genügend viele injektive Objekte, d.h. zu jedem $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ existiert ein Monomorphismus $u: \mathscr{F} \to \mathscr{I}$, $\mathscr{I}$ injektiv in $\boldsymbol{K}''$ ([9], chap. I, 1.10.). Hierfür läßt sich auch ein kurzer direkter Beweis angeben ([6], 3.h., p. 17—07f.).

1.2.4. *Funktoren auf der Kategorie der q.k. Garben, abgeleitete Funktoren* ([7], 3.4.). $(X, \mathcal{O}_X)$ sei ein Präschema, $\mathscr{F}$ eine q.k. Garbe auf X. Dann ist der Modul $\Gamma(X, \mathscr{F})$ der *globalen Schnittflächen* von $\mathscr{F}$ ein $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$-Modul. *Der Funktor $\Gamma: \mathscr{F} \to \Gamma(X, \mathscr{F})$ von der Kategorie der q.k. Garben auf X in die Kategorie der k-Moduln ist linksexakt. Ist X affin, so ist Γ sogar exakt.*

BEWEIS. Nur die erste Behauptung bedarf eines Beweises. Mit der wie in 1.2.3. aus den offenen affinen Mengen bestehenden Basis $\mathfrak{B}$ für die Topologie von X ist $\Gamma(X, \mathscr{F}) = \varprojlim_{U \in \mathfrak{B}} \Gamma(U, \mathscr{F})$ (1.1.2.). Aus $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ exakt folgt $0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$ exakt für alle $U \in \mathfrak{B}$ und $\varprojlim$ ist ein linksexakter Funktor.

[5]) $(\mathscr{G})^J$ bedeutet $\bigoplus_{j \in J} \mathscr{G}_j$ mit $\mathscr{G}_j = \mathscr{G}$ für alle $j \in J$.

$f=(\varphi,\theta)\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ sei ein Morphismus von Präschemata. Dann ist f_* (1.1.4.) ein linksexakter Funktor von der Kategorie der q.k. Garben auf X in die Kategorie der q.k. Garben auf Y. Besitzt f die Eigenschaft: i) Für jede offene affine Menge $V<Y$ ist $f^{-1}(V)$ affin auf X, oder ii) Es existiert eine Überdeckung $Y=\bigcup_\alpha V_\alpha$ durch offene affine V_α mit $f^{-1}(V_\alpha)$ affin auf X für alle α, so ist f_* sogar exakt.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ q.k. auf X, so ist $f_*(\mathcal{F})$ q.k. auf Y ([13], chap. I, 9.2.). Die Behauptung über Linksexaktheit bzw. Exaktheit ergibt sich unmittelbar aus der Definition von f_* und dem Exaktheitsverhalten des Funktors Γ.

Andere wichtige Funktoren sind die Bifunktoren i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, ii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, iii) $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$, $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}''$, der Kategorie der q.k. Garben auf $(X,\mathcal{O}_X)$.

i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist ein Bifunktor von $\boldsymbol{K}''\times\boldsymbol{K}''$ in die Kategorie der abelschen Gruppen, kontravariant im 1., kovariant im 2. Argument. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist in beiden Argumenten linksexakt (S. [3], chap. II, 4.). $0\to\mathcal{F}'\xrightarrow{i}\mathcal{F}\xrightarrow{u}\mathcal{G}$ z.B. ist nämlich nach Definition (1.2.1.) genau dann exakt, wenn für alle $\mathcal{X}\in\boldsymbol{K}''$ die Folge von abelschen Gruppen $0\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{F}')\xrightarrow{i}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{F})\xrightarrow{u}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{G})$ exakt ist.

ii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist folgendermaßen definiert: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(\mathcal{F}|U,\mathcal{G}|U)$ für U offen in X. Mit der natürlichen Einschränkung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(\mathcal{F}|U,\mathcal{G}|U)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|V}(\mathcal{F}|V,\mathcal{G}|V)$ für $U>V$ erhält man so eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Ist $\mathcal{F}$ kohärent, so ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ q.k. Ist auch $\mathcal{G}$ kohärent, so ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ kohärent. Dies ergibt sich aus $\mathrm{Hom}_A(M,N)_S\simeq\mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$ für A-Moduln M, N, falls M endlich erzeugt ist ([13], chap. 0, 1.3.5.).

Es ist die Faser $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ ([18], 14.). $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist linksexakt in beiden Argumenten.

iii) $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$: Mit obiger Basis $\mathfrak{B}$ der offenen Mengen von X setzen wir für $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}''$ $(\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G})(U)=\mathcal{F}(U)\underset{\mathcal{O}(U)}{\otimes}\mathcal{G}(U)$ für $U\in\mathfrak{B}$. Wegen der Vertauschbarkeit von Tensorprodukt und Quotientenbildung ([13], chap. 0, 1.3.4.) wird dadurch eine q.k. Garbe über $\mathfrak{B}$ und damit auf X definiert. Mit $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist auch $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$ kohärent. Es ist $(\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G})_x\simeq\mathcal{F}_x\underset{\mathcal{O}_x}{\otimes}\mathcal{G}_x$ (Vertauschbarkeit von direktem Limes und Tensorprodukt). $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$ ist rechts-exakt in beiden Argumenten.

Nach 1.2.3. enthält unsere Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf einem Präschema $(X,\mathcal{O}_X)$ genügend viele injektive Objekte. Dabei heißt $\mathcal{J}\in\boldsymbol{K}''$ *injektiv*, wenn der Funktor $\mathcal{F}\Rightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{J})$, $\mathcal{F}\in\boldsymbol{K}''$, exakt ist. S sei ein *additiver* und kovarianter *Funktor* von $\boldsymbol{K}''$ in eine abelsche Kategorie $\boldsymbol{H}$ (S heißt additiv, wenn für $u,v\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ $S(u+v)=S(u)+S(v)$), z.B. der Funktor $\mathcal{F}\Rightarrow\Gamma(X,\mathcal{F})$, $\mathcal{F}\Rightarrow f_*(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}\Rightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$, oder $\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$. Für $\mathcal{F}\in\boldsymbol{K}''$ heißt eine exakte Folge $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{J}^0\xrightarrow{d^0}\mathcal{J}^1\xrightarrow{d^1}\mathcal{J}^2\xrightarrow{d^2}\cdots$, $\mathcal{J}^n$ injektiv in $\boldsymbol{K}''$, eine *injektive Auflösung von* $\mathcal{F}$. Dann definiert die Folge $(S(\mathcal{J}^n)$,

$S(d^n))_{n\geqq 0}$ einen Komplex in $\boldsymbol{H}$, dessen Cohomologieobjekte $R^n S(\mathscr{F}) = \mathrm{Kern}$ $S(d^n)/\mathrm{Bild}\, S(d^{n-1})$ nur von $\mathscr{F}$ und nicht von der gewählten Auflösung ab hängen. Dies sind die *abgeleiteten Funktoren von* S ([9], chap. I, 2.3., [3] chap. V., 3.). *Die Folge* $(R^n S)_{n\geqq 0}$ *hat die Eigenschaften:*

(*i*) *Die* $R^n S$ *sind (additive) Funktoren von* $\boldsymbol{K}''$ *in* $\boldsymbol{H}$.

(*ii*) *Für jede exakte Folge* $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ *in* $\boldsymbol{K}''$ *hat man (verbindende) Morphismen* $\partial: R^n S(\mathscr{F}'')\to R^{n+1} S(\mathscr{F}')$ *in* $\boldsymbol{H}$.

(*iii*) *Für ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F}' & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u''} \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G}' & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{G}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

in $\boldsymbol{K}''$ *mit exakten Zeilen hat man kommutative Diagramme in* $\boldsymbol{H}$

$$\begin{array}{ccc} R^n S(\mathscr{F}'') & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(\mathscr{F}') \\ {\scriptstyle R^n S(u'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^{n+1} S(u')} \\ R^n S(\mathscr{G}'') & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(\mathscr{G}') \end{array}$$

(*iv*) *Für jede exakte Folge* $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ *in* $\boldsymbol{K}''$ *ist die zugehörige Folge* $\cdots\xrightarrow{\partial} R^n S(\mathscr{F}')\to R^n S(\mathscr{F})\to R^n S(\mathscr{F}'')\xrightarrow{\partial} R^{n+1} S(\mathscr{F}')\to\cdots$ *exakt in* $\boldsymbol{H}$.

(*v*) *Ist* S *linksexaktt, so sind die Funktoren* S *und* $R^0 S$ *natürlich isomorph*

(*vi*) *Ist* $\mathscr{J}$ *injektiv in* $\boldsymbol{K}''$, *so ist* $R^n S(\mathscr{J}) = 0$ *für* $n > 0$.

Durch (*i*) bis (*vi*) ist die Folge $(R^n S)_{n\geqq 0}$ bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.

$0\to\mathscr{F}\xrightarrow{\varepsilon'}\mathscr{F}^0\xrightarrow{\delta^0}\mathscr{F}^1\xrightarrow{\delta^1}\mathscr{F}^2\xrightarrow{\delta^2}\cdots$ sei eine Auflösung von $\mathscr{F}$ in $\boldsymbol{K}''$, d.h. ein exakte Folge in $\boldsymbol{K}''$ mit nicht notwendig injektiven $\mathscr{F}^n$. Dann existieren Morphismen $v^n: \mathscr{F}^n\to\mathscr{J}^n$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathscr{F}^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \mathscr{F}^1 & \xrightarrow{\delta^1} & \mathscr{F}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \\ & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^0} & & \downarrow{\scriptstyle v^1} & & \downarrow{\scriptstyle v^2} \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathscr{J}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathscr{J}^1 & \xrightarrow{d^1} & \mathscr{J}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \end{array}$$

in $\boldsymbol{K}''$ kommutativ ist. Daraus erhält man einen Morphismus der Komplexe in $\boldsymbol{H}$ $S(v): \big(S(\mathscr{F}^n), S(\delta^n)\big)\to\big(S(\mathscr{J}^n), S(d^n)\big)$ und Morphismen zwischen den Cohomologieobjekten dieser Komplexe $v^n_*: H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big)\to H^n\big(S(\mathscr{J}^*)\big) = R^n S(\mathscr{F})$. *Die* v^n_* *hängen nicht von der Wahl der* v^n, *sondern nur von der Auflösung* $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}^0\to\mathscr{F}^1\to\cdots$ *ab*, da die v^n bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind ([3], chap. V, 2.). Sie sind *Isomorphismen, wenn die* $\mathscr{F}^n$, $n\geqq 0$, *S-azyklisch* sind, d.h. wenn $R^p S(\mathscr{F}^n) = 0$ für $p\geqq 1$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathscr{F}^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \mathscr{F}^1 & \xrightarrow{\delta^1} & \mathscr{F}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u^0} & & \downarrow{\scriptstyle u^1} & & \downarrow{\scriptstyle u^2} \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \xrightarrow{\eta'} & \mathscr{G}^0 & \xrightarrow{\tau^0} & \mathscr{G}^1 & \xrightarrow{\tau^1} & \mathscr{G}^2 \xrightarrow{\tau^2} \cdots \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm in $\boldsymbol{K}''$ mit exakten Zeilen. Die Auflösungen $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}^0 \to \mathscr{F}^1 \to \cdots$ und $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}^0 \to \mathscr{G}^1 \to \cdots$ definieren Morphismen $v_*^n : H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big) \to R^n S(\mathscr{F})$ und $w_*^n : H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big) \to R^n S(\mathscr{G})$. Ferner definieren u und die u^n Morphismen $R^n S(u) : R^n S(\mathscr{F}) \to R^n S(\mathscr{G})$, $u_*^n : H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big) \to H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big)$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big) & \xrightarrow{v_*^n} & R^n S(\mathscr{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle u_*^n} & & \downarrow{\scriptstyle R^n S(u)} \\ H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big) & \xrightarrow{w_*^n} & R^n S(\mathscr{G}) \end{array}$$

kommutativ ([7], p. 3—11 f.).

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F}^0 & \longrightarrow & \mathscr{F}^1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{G}^0 & \longrightarrow & \mathscr{G}^1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E}^0 & \longrightarrow & \mathscr{E}^1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm in $\boldsymbol{K}''$ mit exakten Zeilen, ferner seien die Folgen $0 \to S(\mathscr{F}^n) \to S(\mathscr{G}^n) \to S(\mathscr{E}^n) \to 0$ exakt in $\boldsymbol{H}$ für $n \geqq 0$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big) & \longrightarrow & H^n\big(S(\mathscr{E}^*)\big) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}\big(S(\mathscr{F}^*)\big) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & R^n S(\mathscr{G}) & \longrightarrow & R^n S(\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(\mathscr{F}) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

kommutativ ([7], p. 3—13).

Die letzteren Aussagen sollen im folgenden Abschnitt zur Berechnung der abgeleiteten Folge $(R^n S)_{n \geqq 0}$ mit Hilfe der Čechschen Überdeckungen angewandt werden. Wir interessieren uns dabei vornehmlich für die abgeleiteten Funktoren $R^n \Gamma(\ )$ und $R^n f_*(\ )$. Die ersteren werden als *Cohomologiemoduln auf* X und mit $H^n(X, \ )$, die letzteren als *direkte Bilder bei* $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ bezeichnet.

1.2.5. *Berechnung der abgeleiteten Funktoren nach* Čech, *Schemata.* $(X, \mathscr{O}_X)$ sei ein Präschema, V eine offene Menge von X. Mit der kanonischen Injektion $i : V \to X$ ist für eine q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X $i^*(\mathscr{F})$ q.k. auf V: Es ist nach 1.1.3., 1.1.4. $i^*(\mathscr{F})(U) \simeq \mathscr{F}(U)$ für jedes offene $U \subset V$, und diese Isomorphie ist mit den Restriktionshomomorphismen r_U^U für $U \supset U'$ verträglich. $\mathscr{F} \Rightarrow i^*(\mathscr{F})$ ist ein *exakter Funktor.* $\mathscr{F} \Rightarrow i_*\big(i^*(\mathscr{F})\big)$ ist daher ein linksexakter Funktor von der Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X in $\boldsymbol{K}''$. Wir schreiben auch $i_*\big(i^*(\mathscr{F})\big) = \mathscr{F}_V$.

Mit $g_U = r^U_{V\cap U}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V\cap U) = \mathscr{F}_V(U)$ für jedes offene $U \subset X$ erhält man einen Morphismus g_V des Funktors $\mathrm{Id}: \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}$ in den Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_V$ (vgl. 1.1.1.).

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ sei eine endliche Familie von offenen Mengen von X. Wir schreiben $\mathscr{F}_i$ anstelle von $\mathscr{F}_{U_i}$, $\mathscr{F}_{ij}$ anstelle von $(\mathscr{F}_i)_j$, ..., g_i anstelle von g_{U_i}. $\boldsymbol{K}''$ ist eine abelsche Kategorie mit endlichen direkten Produkten (diese stimmen in beliebigen additiven Kategorien mit den endlichen direkten Summen überein ([9], chap. I, 1.3.) und direkte Summen sind Spezialfälle von direkten Limites (1.1.1.)). Zu $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ hat man eine Familie von Funktoren $(\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_i)_{i\in I}$ von $\boldsymbol{K}''$ in $\boldsymbol{K}''$, für jedes $i \in I$ einen Morphismus g_i des Funktors $\mathrm{Id}: \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}$ in den Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_i$ und für jedes Paar (i, j) einen Isomorphismus g_{ij} des Funktors $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_{ij}$ mit dem Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_{ji}$, so daß $g_{ij} \circ g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$. Dann definiert man einen Funktor $\mathscr{C}^*$ von $\boldsymbol{K}''$ in die Komplexe über $\boldsymbol{K}''$: I werde vollständig geordnet, $\mathscr{C}^n(\mathscr{F}) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, wo das Produkt über alle aufsteigenden Folgen von $n+1$ Elementen aus I erstreckt wird. Mit der natürlichen Projektion $p_{i_0 \ldots i_n}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{i_0 \ldots i_n}$ erhält man einen Morphismus $g_{ik} \circ p_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1} i_k}$. Mit $d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}}$ bezeichnen wir die Zusammensetzung des Morphismus $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k g_{ik} \circ p_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}$ und des kanonischen Isomorphismus von $\mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1} i_k}$ auf $\mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots i_k \ldots i_{n+1}}$. Dann erhält man den *Corandmorphismus* $d^n = \prod_{i_0 < \cdots < i_{n+1}} d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{C}^{n+1}(\mathscr{F})$.

Es ist $d^{n+1} \circ d^n = 0$. $\big(\mathscr{C}^n(\mathscr{F}), d^n\big)$ ist ein *Komplex über* $\boldsymbol{K}''$, der alternierende *Čechsche Komplex* oder auch *Koszulkomplex zu* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$. Er wird mit $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ bezeichnet.

Für offenes $U \subset X$ ist $\Gamma\big(U, \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \cdots i_n} \cap U)$, wo $U_{i_0 i_1 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n}$.

Ist $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X, d.h. $X = \bigcup_i U_i$, so hat man vermöge der $g_i: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_i$ einen Morphismus $\varepsilon: \mathscr{F} \to \prod_i \mathscr{F}_i$. *Die Folge*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^n} \mathscr{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \cdots$$

ist dann exakt, bildet also eine Auflösung von $\mathscr{F}$ *im Sinne von* 1.2.4. ([6], p. 3–18 oder [8], chap. II, 5.2.), *die Čechsche Auflösung zu* $\mathfrak{U}$.

Bezeichnen wir für einen Funktor S wie in 1.2.4. die Cohomologieobjekte des Komplexes $\big(S(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})), S(d^n)\big)_{n\geq 0}$ mit $S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, dann sind dies Funktoren von $\mathscr{F}$, und man hat (1.2.4.) Morphismen von Funktoren $v^n_{\mathscr{F}}: S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to R^n S(\mathscr{F})$. Ist die Folge $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ exakt in $\boldsymbol{K}''$ und sind auch die Folgen $0 \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0$ exakt in $\boldsymbol{H}$ für $n \geqq 0$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) & \longrightarrow & S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & S^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle v^n_{\mathscr{G}}} & & \downarrow{\scriptstyle v^n_{\mathscr{E}}} & & \downarrow{\scriptstyle v^{n+1}_{\mathscr{F}}} \\ R^n S(\mathscr{G}) & \longrightarrow & R^n S(\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(\mathscr{F}) \end{array}$$

kommutativ.

Sind für $n \geqq 0$ die $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ S-azyklisch, d.h. ist $R^p S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$, so sind die $v^n_{\mathscr{F}}$ sämtlich Isomorphismen (1.2.4.), und man kann die abgeleiteten Funktoren $R^p S$ mit Hilfe der Čechschen Auflösung berechnen.

Für das folgende benötigen wir die beiden

Voraussetzungen. *(i) Der Durchschnitt von je zwei offenen affinen Mengen des Präschemas $(X, \mathcal{O}_X)$ ist wieder eine affine Menge.*

(ii) Für den Morphismus $f = (\varphi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ der Präschemata gilt: Ist U' offen und affin in Y und U offen und affin in X, so ist $U \cap \bar{\varphi}^1(U')$ affin in X.

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ sei eine *endliche Überdeckung von X durch offene affine Mengen U_i.* Dann gilt:

Unter der Voraussetzung (i) ist der Čechsche Komplex $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ für jedes $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ Γ-azyklisch. Unter den Voraussetzungen (i) und (ii) ist der Čechsche Komplex $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ für jedes $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ f_*-azyklisch.

Mit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ exakt in $\boldsymbol{K}''$ sind dann auch die Folgen

$$0 \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0 \quad \textit{und}$$

$$0 \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0 \quad \textit{exakt.}$$

Beweis. Hinsichtlich der letzten Behauptung beachte man, daß nach Obigem $\Gamma\big(V, \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cap V)$. Für $V = X$ ist nun nach Voraussetzung *(i)* $U_{i_0 \ldots i_n} \cap V$ wieder affin. Aus der Exaktheit von $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ ergibt sich aber die Exaktheit von $0 \to \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_n}) \to \mathscr{G}(U_{i_0 \ldots i_n}) \to \mathscr{E}(U_{i_0 \ldots i_n}) \to 0$ und damit die Behauptung. Ebenso ist nach Voraussetzung *(ii)* für $V = \bar{\varphi}^1(U')$, U' offen und affin in Y, $U_{i_0 \ldots i_n} \cap V$ affin.

Hinsichtlich der ersten beiden Behauptungen haben wir $R^p S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$ und $S = \Gamma$ bzw. f_* zu zeigen. Dazu betrachten wir die folgende injektive Auflösung von $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) : 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{J}^1 \xrightarrow{d^1} \mathscr{J}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ sei eine injektive Auflösung von $\mathscr{F}$. Dann ist $0 \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^0) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^1) \xrightarrow{d^1} \cdots$ eine *injektive Auflösung von $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$*. Wie wir aus [6], p. 17—07 und p. 17—30 entnehmen, ist nämlich für offenes affines $V \subset X$, $i : V \to X$, mit $\mathscr{J}$ auch $\mathscr{J}_V = i_*\big(i^*(\mathscr{J})\big)$ injektiv, nach Definition ist $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{J}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, und $U_{i_0 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$ ist affin nach Voraussetzung *(i)*. Die Exaktheit der Folge $0 \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^0) \to \cdots$ ergibt sich aus der Exaktheit von $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^0 \to \mathscr{J}^1 \to \cdots$ wie oben beim Beweis der letzten Behauptung. Anwendung der Funktoren Γ und f_* auf den Komplex $\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^n), d^n\big)_{n \geqq 0}$ ergibt aber, wie man wieder wie oben erkennt, einen exakten Komplex. Folglich sind die $R^p\Gamma\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big)$ und die $R^p f_*\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$.

Als Folgerungen erhält man:

Unter den Voraussetzungen (i) und (ii) kann man die abgeleiteten Funktoren $H^q(X, \mathscr{F}) = R^q\Gamma(X, \mathscr{F})$ und $R^q f_*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$, mit Hilfe einer beliebigen Čech-

schen Auflösung $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *von* $\mathscr{F}$ *zu einer endlichen Überdeckung* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ *von* X *durch offene affine Mengen* $U_i \subset X$ *berechnen* (1.2.4.).

BEMERKUNG. Da für die in der größeren Kategorie aller $\mathcal{O}$-Moduln abgeleiteten Funktoren von Γ und f_* *angewandt auf Objekte* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ dasselbe gilt ([7], 3. oder [8], chap. II, 5.), stimmen die wie oben definierten $H^q(X, \mathscr{F})$ und $R^q f_*(\mathscr{F})$ mit den dort definierten abgeleiteten Funktoren überein.

Besitzt X *eine endliche offene affine Überdeckung* $\mathfrak{U}$, *so daß alle Durchschnitte von je* $n+2$ *verschiedenen* $U_i \in \mathfrak{U}$ *leer sind, so ist* $\mathscr{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ *für* $q > n$, *also* $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$ *und* $R^q f_*(\mathscr{F}) = 0$ *für alle* $q > n$ *und* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$.

Für ein affines Präschema X *ist für* $q > 0$ *und alle* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$[6]. (Nach 1.2.4. ist $\mathscr{F} \Rightarrow \Gamma(X, \mathscr{F})$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$, ein exakter Funktor.)

Besitzt der Morphismus $f = (\varphi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *die in* 1.2.4. *angegebenen Eigenschaften i) oder ii), so ist für* $q > 0$ *und alle* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ $R^q f_*(\mathscr{F}) = 0$[6]. (Nach 1.2.4. ist dann nämlich $\mathscr{F} \Rightarrow f_*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$, ein exakter Funktor.)

Unter denselben Voraussetzungen gilt: $H^q(X, \mathscr{F})$ *ist kanonisch isomorph zu* $H^q\big(Y, f_*(\mathscr{F})\big)$.

BEWEIS. Ist $\mathfrak{U}'$ eine endliche offene affine Überdeckung von Y und $\mathfrak{U} = \big(\overline{\varphi}^1(U_i'); U_i' \in \mathfrak{U}'\big)$ eine ebensolche Überdeckung von X, so ist $\Gamma\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}', f_*(\mathscr{F}))\big) = \Gamma\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big)$.

Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *ein Morphismus der Präschemata und* $\mathscr{F}$ *q.k. auf* X, *so sind auch die* $R^q f_*(\mathscr{F})$ *q.k. auf* Y. *Ist* U' *offen und affin in* Y, *so ist* $\Gamma\big(U', R^q f_*(\mathscr{F})\big) \simeq H^q\big(f^{-1}(U'), \mathscr{F}\big)$ ([7], p. 3—22).

Zu den Voraussetzungen (*i*) und (*ii*) ist folgendes zu bemerken: Sie sind im allgemeinen nicht erfüllt. Um sie sicher zu stellen, hat man den Begriff des Präschemas zu dem des *Schemas* einzuschränken. Nach GROTHENDIECK ([13], chap. I, 2.5.) definiert man:

Gegeben sei ein festes Präschema S. Ein Präschema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \to S$ der Präschemata heißt ein *Präschema über* S oder *S-Präschema*. Ist S affin zum Ring A, so spricht man auch von einem Präschema über A bzw. *A-Präschema*.

X, Y seien S-Präschemata. Ein Morphismus $u : X \to Y$ der Präschemata ist ein *Morphismus der Präschemata über* S oder ein S-Morphismus, wenn das Diagramm $X \xrightarrow{u} Y$ kommutativ ist.

$$\searrow \quad \swarrow$$
$$S$$

Die S-Präschemata mit den S-Morphismen bilden eine Kategorie. In dieser Kategorie existiert das (direkte) *Produkt von zwei S-Präschemata* X, Y im Sinne von 1.1.1. ([13], chap. I, §3). Es wird mit $X \underset{S}{\times} Y$ bezeichnet.

Ein S-Präschema X heißt *separiert*, wenn der Diagonalmorphismus $X \to X \underset{S}{\times} X$ *abgeschlossen* ist (s. [13], chap. I, §4, §5). X heißt dann auch ein *S-Schema*. Jedes Präschema ist auf natürliche Weise ein Präschema über

[6]) Hiervon gilt auch die Umkehrung. Vgl. dazu [12] und [7], exp. 2.

dem affinen Schema $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, das zum Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen gehört. Ein Präschema X wird *Schema* genannt, wenn das $\mathbf{Z}$-Präschema X separiert ist. Jedes affine Schema ist ein Schema ([13], chap. I, 5.5.).

Die S-Schemata bzw. die Schemata bilden mit den S-Morphismen bzw. den $\mathbf{Z}$-Morphismen (das sind die gewöhnlichen Morphismen von Präschemata) jeweils eine Kategorie.

Die Voraussetzungen (i) und (ii) sind jedenfalls dann erfüllt, wenn man sich auf Schemata beschränkt ([13], chap. I, 5.5.10.).

k sei ein Körper. Ein *algebraisches k-Präschema* X ist ein k-Präschema, das sich durch endlich viele offene affine Mengen U_i überdecken läßt, deren zugehörige Ringe A_i (als Ringe) über k endlich erzeugt sind. (Vermöge des Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(k)$ hat man kanonische Injektionen $k \to A_i$.) Ist X ein Schema oder, was dasselbe ist, ein k-Schema, so heißt X ein *algebraisches k-Schema* oder ein *algebraischer Raum*.

Ein Präschema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert* bzw. *normal* bzw. *regulär* im Punkte $x \in X$, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_x$, die Faser der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ über x, reduziert (d.h. ohne nilpotente Elemente) bzw. normal (d.h. integer und ganz abgeschlossen) bzw. regulär (d.h. von endlicher globaler homologischer Dimension) ist.

1.3. Projektive Schemata

1.3.1. *Projektive Schemata über einem affinen Schema* ([12], [18], chap. III). In [12] wird für ein beliebiges Präschema Y der Begriff des *projektiven Präschemas X über Y* oder des *projektiven Morphismus* $\varphi: X \to Y$ definiert. (Wir schreiben hier anstelle von $f = (\varphi, \theta): (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ in 1.1.4. kürzer $\varphi: X \to Y$.) Ist $\mathcal{F}$ eine q.k. Garbe auf X, so interessiert man sich für die direkten Bilder $R^q\varphi_*(\mathcal{F})$. Das sind q.k. Garben auf Y. Ist U offen in Y, so gilt $R^q\varphi_*(\mathcal{F}) \mid U = R^q\big(\varphi \mid \bar{\varphi}^1(U)\big)_*\big(\mathcal{F} \mid \bar{\varphi}^1(U)\big)$. Für offenes affines $U' \subset U$ ist nämlich nach 1.2.5.

$$R^q\varphi_*(\mathcal{F})(U') = \Gamma\big(U', R^q\varphi_*(\mathcal{F})\big) \sim H^q\big(\bar{\varphi}^1(U'), \mathcal{F}\big) = H^q\big(\bar{\varphi}^1(U'), \mathcal{F} \mid \bar{\varphi}^1(U)\big)$$
$$\sim \Gamma\big(U', R^q(\varphi \mid \bar{\varphi}^1(U))_*(\mathcal{F} \mid \bar{\varphi}^1(U))\big) = R^q(\varphi \mid \bar{\varphi}^1(U))_*(\mathcal{F} \mid \bar{\varphi}^1(U))(U').$$

Daher genügt es, sich auf ein *affines Schema* Y zu beschränken. Für einen projektiven Morphismus $\varphi: X \to Y$, Y affin, wird aber $R^q\varphi_*(\mathcal{F})$ als q.k. Garbe über Y durch den $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = A$-Modul $\Gamma\big(Y, R^q\varphi_*(\mathcal{F})\big) \sim H^q(X, \mathcal{F})$ bestimmt. Wir beschränken uns also auf projektive Morphismen $\varphi: X \to Y$, Y affin, und die Berechnung von $H^q(X, \mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ q.k. auf X. Wir werden in 1.3.3. zeigen: *Für kohärentes $\mathcal{F}$ auf X sind die $H^q(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugte A-Moduln.* Damit ist gezeigt: *Die Bilder kohärenter Garben bei projektiven Morphismen sind wieder kohärent.* Allgemeiner gilt dies für beliebige *eigentliche* Morphismen. Zum Beweis führt man die letztere Aussage mit Hilfe des Chowschen Lemmas auf die erstere zurück. Hierzu sei auf [11] verwiesen. Im Spezialfall: Y = affines Schema, zu einem *Körper k* gehörig, erhält man so für ein projektives Schema über k: Die Cohomologiemoduln $H^q(X, \mathcal{F})$

sind für kohärente $\mathscr{F}$ endlich-dimensional über k. Speziell gilt dies für $H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$, den Modul der Schnitte von $\mathscr{F}$.

Ein *projektives Schema* $(X, \mathcal{O}_X)$ *über dem* zum Ring A gehörigen *affinen Schema* $(Y, \tilde{A})$, oder ein *projektives Schema über* A wird gegeben durch eine *graduierte A-Algebra* B, die von endlich vielen Elementen 1. Grades erzeugt wird: $B = \bigoplus_{n \geqq 0} B^n = A[t_0, \ldots, t_r]$, $t_i \in B^1$, $B^0 = A$. $(X, \mathcal{O}_X)$ entsteht aus B folgendermaßen: Man versieht das projektive Spektrum des graduierten Ringes B, $X = \mathrm{Spec}^0(B) = \left(\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal in } B,\ \mathfrak{p} \not\supset \bigoplus_{n \geqq 1} B^n\right)$, mit der Zariski-Topologie: Eine Basis $\mathfrak{B}$ derselben bilden die Mengen $D(f) = \left(x;\ x \in X, f(x) \neq 0\right)$, f homogen $\in B$. $f(x) \neq 0$ bedeutet wieder $f \notin \mathfrak{p}_x$. Es ist $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Mit $\tilde{B}^0\left(D(f)\right) = (B_f)^0 = (b/f^n;\ b \in B,\ n \geqq 0,\ \mathrm{Grad}\ b\ -\ \mathrm{Grad}\ f^n = 0)$, dem Bestandteil 0-ten Grades des Quotientenringes von B nach der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S_f = (f^n;\ n \geqq 0)$ — letzterer ist graduiert, da S_f nur aus homogenen Elementen besteht —, und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f : (B_f)^0 \to (B_g)^0$ für $D(f) \supset D(g)$ erhält man wie in 1.2.1. eine *Garbe* von Ringen über $\mathfrak{B}$. Erweiterung auf X liefert nach 1.1.2. eine Garbe $\tilde{B}^0$ von Ringen auf X mit $\Gamma\left(D(f), \tilde{B}^0\right) = (B_f)^0$ für alle homogenen $f \in B$. Das Paar $(X, \tilde{B}^0)$ heißt *das zu B gehörige projektive Schema*. Daß der geringte Raum $(X, \tilde{B}^0)$ tatsächlich ein Schema im Sinne von 1.2.3. und 1.2.5. ist, ist noch nachzuweisen. Anders als im affinen Fall ist hier der graduierte Ring B durch das Schema $(X, \tilde{B}^0)$ *nicht* eindeutig bestimmt.

Es sei $t \in B^1$, $t \neq 0$. Dann ist B_t ein graduierter Ring und $(B_t)^0$ ein Unterring von B_t. Es ist $B_t = (B_t)^0[t, t^{-1}]$ und zwar frei über $(B_t)^0$. Die homogenen Primideale $\mathfrak{p}$ von B mit $t \notin \mathfrak{p}$ entsprechen nun eineindeutig den homogenen Primidealen von B_t: $\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{p}_t$, und die letzteren entsprechen eineindeutig den Primidealen von $(B_t)^0$: $\mathfrak{p}_t \leftrightarrow \mathfrak{p}_t \cap (B_t)^0$. Ferner gilt für $D(f) < D(t)$, f homogen $\in B$: $f \notin \mathfrak{p}$ ist gleichbedeutend mit $\frac{f}{t^\nu} \notin \mathfrak{p}_t \cap (B_f)^0$, $\frac{f}{t^\nu} \in (B_t)^0$, und $(B_f)^0 \simeq (B_t)^0_{f/t^\nu}$. Somit ist $\left(D(t), \tilde{B}^0 | D(t)\right) \cong \left(\mathrm{Spec}\,((B_t)^0), \widetilde{(B_t)^0}\right)$ als geringter Raum, d.h. $D(t)$ ist offen und affin zum Ring $(B_t)^0$. Für $B = A[t_0, \ldots, t_r]$, $t_i \in B^1$, bilden die $X_i = D(t_i)$ somit eine endliche offene affine Überdeckung von X zu Ringen $(B_{t_i})^0 = A\left[\frac{t_0}{t_i}, \ldots, \frac{t_r}{t_i}\right]$, die also mit A ebenfalls noethersch sind. $(X, \tilde{B}^0)$ ist daher ein Präschema im Sinne von 1.2.3., falls A *noethersch* ist, was wir im folgenden immer voraussetzen wollen. Ebenso ergibt sich: $X_i \cap X_j = D(t_i t_j)$ ist offen und affin, und der Ring $\Gamma(X_i \cap X_j, \tilde{B}^0) = (B_{t_i t_j})^0$ wird von der Vereinigung der kanonischen Bilder von $\Gamma(X_i, \tilde{B}^0) = (B_{t_i})^0$ und $\Gamma(X_j, \tilde{B}^0) = (B_{t_j})^0$ erzeugt. Nach [*13*], chap. I, 5.5.6. ist $(X, \tilde{B}^0)$ also ein Schema im Sinne von 1.2.5. Die kanonischen Homomorphismen $A \to (B_{t_i})^0$ ergeben Morphismen $\varphi_i : X_i \to Y$ der zugehörigen affinen Schemata, die sich zu einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ zusammensetzen. Dies ist der *projektive Morphismus* zu der graduierten A-Algebra B. X läßt sich auch als *Quotientenraum* eines offenen Teils

eines affinen Schemas auffassen: Wir betrachten das affine Schema $(S, \widetilde{B})$ zum Ring B und in S die abgeschlossene Menge $O = \left(x;\ \mathfrak{p}_x \supset \bigoplus_{n \geqq 1} B^n\right)$. $T = S - O$ ist dann offen in S, und es ist $T = \bigcup_i T_i$, $T_i = D(t_i) = \left(x;\ x \in S,\ t_i(x) \neq 0\right)$, also offen und affin zum Ring B_{t_i}. Den kanonischen Monomorphismen $(B_{t_i})^0 \to B_{t_i}$ entsprechen Epimorphismen $\psi_i : T_i \to X_i$ der zugehörigen affinen Schemata, die sich zu einem Epimorphismus $\psi : T \to X$ zusammensetzen. Letzterer hat die Eigenschaft: $\bar{\psi}^1(X_i) = T_i$ ist offen und affin in T für alle X_i einer offenen affinen Überdeckung $\bigcup_i X_i = X$. Dies ist die Eigenschaft *ii*) aus 1.2.4., die nach 1.2.5. $R^q\psi_*(\mathscr{F}) = 0$ für $q > 0$ impliziert. Für q.k. $\mathscr{F}$ auf T ist somit $R^q(\varphi\psi)_*(\mathscr{F}) \sim R^q\varphi_*(\psi_*\mathscr{F})$. Da in $\varphi : X \to Y$ Y affin ist, ist dazu nur zu zeigen $\Gamma\left(Y, R^q(\varphi\psi)_*(\mathscr{F})\right) \sim \Gamma\left(Y, R^q\varphi_*(\psi_*\mathscr{F})\right)$. Nun ist die linke Seite isomorph $H^q(T, \mathscr{F})$, die rechte Seite isomorph $H^q(X, \psi_*\mathscr{F})$. Die letzten beiden Moduln sind aber zufolge der Eigenschaft *ii*) von ψ isomorph (1.2.5., Folgerungen).

M sei ein graduierter B-Modul, $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M^n$. Analog wie oben erhält man mit $\widetilde{M}^0\left(D(f)\right) = (M_f)^0$ für jedes homogene $f \in B$ — M_f ist dann ein graduierter B_f-Modul — und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f : (M_f)^0 \to (M_g)^0$ für $D(f) \supset D(g)$ eine Garbe von Moduln über $\mathfrak{B}$ und damit einen $\widetilde{B}^0$-Modul auf $X : \widetilde{M}^0$. $\widetilde{M}^0$ ist q.k. auf X, und es ist $\widetilde{M}^0(X_i) = (M_{t_i})^0$. *$M \Rightarrow \widetilde{M}^0$ ist ein additiver exakter Funktor von der Kategorie $\mathbf{C}$ der graduierten B-Moduln mit den homogenen Homomorphismen vom Grade 0 als Morphismen in die Kategorie $\mathbf{K}$ der q.k. Garben auf X.* Es ist die Faser über $x \in X$ $(\widetilde{M}^0)_x \simeq (M_{\mathfrak{p}_x})^0$, ein $(B_{\mathfrak{p}_x})^0$-Modul.

Für eine ganze Zahl p definiert man $M(p) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M(p)^n$, $M(p)^n = M^{p+n}$. Wir bezeichnen die Strukturgarbe des projektiven Schemas $(X, \widetilde{B^0})$ auch wieder mit $\mathcal{O}_X$. $B(p)$ ist ein graduierter B-Modul. Wir definieren: $\mathcal{O}_X(p) = \widetilde{B(p)}^0$. $\mathcal{O}_X(p)$ ist offenbar lokal isomorph zu $\mathcal{O}_X$, insbesondere also kohärent. Für eine beliebige q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X definiert man $\mathscr{F}(p) = \mathscr{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X(p)$. $\mathscr{F}(p)$ ist lokal isomorph zu $\mathscr{F}$, also q.k., und kohärent, falls $\mathscr{F}$ kohärent ist. Eine äquivalente Definition des Funktors $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}(p)$ findet man in [*18*], 54.

Satz 1. *Für jedes $\mathscr{F} \in \mathbf{K}$ existiert ein Epimorphismus $\bigoplus_\alpha \mathcal{O}(p_\alpha) \to \mathscr{F} \to 0$.*

Beweis. $\mathscr{F} | X_i$ ist q.k., X_i affin, $\mathscr{F} | X_i$ wird also von einer Familie $(s_i^\alpha)_\alpha$ von Schnitten $s_i^\alpha \in \mathscr{F}(X_i)$ als $\mathcal{O}_{X_i}$-Modul erzeugt. Mit Eigenschaft (*iv*) der q.k. Garben aus 1.2.2. zeigt man wie in [*18*], 55.: Zu $s_i^\alpha \in \mathscr{F}(X_i)$ existiert eine natürliche Zahl n_α und ein $s^\alpha \in \mathscr{F}(n_\alpha)(X)$ mit $s^\alpha | X_i = s_i^\alpha$. Zu $s^\alpha \in \mathscr{F}(n_\alpha)(X)$ gehört aber ein $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\sigma^\alpha : \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}(n_\alpha)$ und dazu ein $\hat{\sigma}^\alpha : \mathcal{O}_X(-n_\alpha) \to \mathscr{F}$. Nach Wahl der $(s_i^\alpha)_\alpha$ gilt nun $\bigoplus_\alpha \mathcal{O}_X(-n_\alpha) \xrightarrow{\oplus \hat{\sigma}^\alpha} \mathscr{F} \to 0$ w.z.z.w.

Satz 2. *Ist $\mathscr{F}$ k. auf X, so gilt für $n \geqq n(\mathscr{F})$: $\mathscr{F}(n)$ wird als $\mathcal{O}_X$-Modul von den Schnitten $\mathscr{F}(n)(X)$ erzeugt.*

Folgerungen. *Ist $\mathscr{F}$ k. auf X, so gibt es Zahlen n, k mit $\mathcal{O}_X(n)^k \to \mathscr{F} \to 0$ $\left(\mathcal{O}_X(n)^k = k\text{-fache direkte Summe}\right)$* ([*18*], 55.).

Ist $\mathscr{F}$ q.k. auf X, so hat man eine exakte Folge

$$\bigoplus_{\beta} \mathscr{O}_X(n_\beta) \to \bigoplus_{\alpha} \mathscr{O}_X(n_\alpha) \to \mathscr{F} \to 0.$$

Ist $\mathscr{F}$ k. auf X, so hat man eine exakte Folge $\mathscr{O}(m)^k \to \mathscr{O}(n)^l \to \mathscr{F} \to 0$.

1.3.2. *Quasi-kohärente Garben auf einem projektiven Schema* ([18], 56.—60., 65.). Wir befassen uns hier mit der Beziehung zwischen graduierten B-Moduln und quasi-kohärenten Garben auf dem zu B gehörigen projektiven Schema. Die ersteren treten an die Stelle der A-Moduln bei einem affinen Schema zum Ring A. Im Gegensatz zum affinen Fall ist jedoch hier die Situation nicht ganz so einfach. Für einen graduierten B-Modul M hat man mit den Bezeichnungen von 1.3.1. folgendes Diagramm

Räume	Ringe $\Gamma(\ldots, \mathscr{O})$	Moduln $\Gamma(\ldots, \mathscr{F})$	Garben $\mathscr{F}$	
$S =$	$S \dashleftarrow\dashrightarrow B$	M	$\widetilde{M}$	$\widetilde{M}$
Inj. $j\uparrow$	$i_i\uparrow$ $\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow j_i^*$	$\downarrow j^*$
$T = \bigcup_i T_i$	$\dashleftarrow\dashrightarrow B_{t_i}$	$M_{t_i} = M \underset{B}{\otimes} B_{t_i}$	$\mathscr{B}(M)\mid T_i$	$\mathscr{B}(M)$
affin $\psi\downarrow$	$\psi_i\downarrow$ $\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow (\psi_{i*})^0$	$\downarrow (\psi_*)^0$
$X = \bigcup_i X_i$	$\dashleftarrow\dashrightarrow (B_{t_i})^0$	$(M_{t_i})^0$	$\mathscr{A}(M)\mid X_i$	$\mathscr{A}(M)$
proj. $\varphi\downarrow$	$\varphi_i\downarrow$ $\uparrow$			
$Y =$	$Y \dashleftarrow\dashrightarrow A$			

Wir bezeichnen hier die M zugeordnete q.k. Garbe $\widetilde{M}^0$ auf X mit $\mathscr{A}(M) = \widetilde{M}^0$ und, wenn $\widetilde{M}$ die dem B-Modul M auf dem affinen Schema S zugeordnete q.k. Garbe bezeichnet und $j: T \to S$ die kanonische Injektion, die Einschränkung $\widetilde{M}\mid T = j^*(\widetilde{M})$ mit $\mathscr{B}(M) = j^*(\widetilde{M})$. $\mathscr{B}(M)$ ist q.k. auf T, und das direkte Bild $\psi_*(\mathscr{B}(M))$ besitzt eine direkte Summenzerlegung $\psi_*(\mathscr{B}(M)) = \bigoplus_n \mathscr{A}(M(n)) \sim \bigoplus_n \mathscr{A}(M)(n)$ (letzteres wegen $\mathscr{A}(M(n)) = \widetilde{(M \underset{B}{\otimes} B(n))}^0 \simeq \widetilde{M}^0 \underset{\widetilde{B}^0}{\otimes} \widetilde{B(n)}^0 = \mathscr{A}(M) \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{O}_X(n) = \mathscr{A}(M)(n)$). Die graduierten B_{t_i}-Moduln M_{t_i} besitzen nämlich aufgefaßt als $(B_{t_i})^0$-Moduln eine direkte Summenzerlegung $M_{t_i} = \bigoplus_n (M_{t_i})^n$, deren 0-ter Summand gerade $(M_{t_i})^0$ ist. $\mathscr{A}(M)$ erhält man also folgendermaßen:

$$M \to \widetilde{M} \to \mathscr{B}(M) = j^*(\widetilde{M}) \to \psi_*(\mathscr{B}(M)) \to \psi_*(\mathscr{B}(M))^0 = \mathscr{A}(M).$$

Ist $M^n = 0$ für $n \geqq N$, so ist $\mathscr{A}(M) = 0$. Hiervon gilt die Umkehrung, falls M endlich erzeugt ist. $\mathscr{A}(M) = 0$ ist nämlich äquivalent mit der Aussage: Für alle homogenen $m \in M$ gilt: Ist $x \in X$, so folgt $\mathfrak{p}_x \not\supset \operatorname{Ann}(m)$. Genau dann ist nämlich die Faser $(\widetilde{M}^0)_x = (M_{\mathfrak{p}_x})^0 = 0$. „Aus $x \in X$ folgt $\mathfrak{p}_x \not\supset \operatorname{Ann}(m)$" ist aber gleichbedeutend mit „$\operatorname{Ann}(m) \supset (t_0, \ldots, t_n)^\sigma$ für ein σ". Schließlich ist genau dann $\mathscr{A}(M) = 0$, wenn $\mathscr{B}(M) = 0$ ist.

Da $M \Rightarrow \mathscr{A}(M)$ ein exakter Funktor ist, gilt: Die graduierten B-Moduln M mit $\mathscr{A}(M) = 0$ bilden eine Unterkategorie $\boldsymbol{C}'$ der Kategorie $\boldsymbol{C}$ aller graduierten B-Moduln mit der Eigenschaft: Ist $M' \to M \to M''$ exakt in $\boldsymbol{C}$, und

sind $M', M'' \in \boldsymbol{C}'$, so folgt $M \in \boldsymbol{C}'$. Nach [9], chap. I, 1.11. kann man dann die *Quotientenkategorie* $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ bilden. Da $\boldsymbol{C}$ eine abelsche Kategorie ist, ist auch $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ abelsch. Wir zeigen:

Satz 3. *Die Kategorie* $\boldsymbol{K}$ *der q.k. Garben auf dem projektiven Schema* X *zu* B *und die Kategorie* $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ *sind äquivalent im Sinne von* [9], chap. I, 1.2.

Dazu definieren wir zunächst noch einen Funktor Γ von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{C}$ und Morphismen $\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$, $M \in \boldsymbol{C}$, $\beta: \mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$: Wir setzen $\Gamma(\mathscr{F}) = \bigoplus_n \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) = \bigoplus_n \mathscr{F}(n)(X)$. Da $\mathscr{F} \to \mathscr{F}(n)$ exakt und $\mathscr{F}(n) \Rightarrow \mathscr{F}(n)(X)$ linksexakt ist, ist $\mathscr{F} \to \Gamma(\mathscr{F})$ linksexakt. $\Gamma(\mathscr{F})$ ist ein graduierter B-Modul: Man hat kanonische Homomorphismen $B^p \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(p))$, $b \to \overset{b}{1}$, und $\mathcal{O}_X(p) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathscr{F}(q) \sim \mathscr{F}(q)(p) \sim \mathscr{F}(p+q)$, also Abbildungen $B^p \times \Gamma(X, \mathscr{F}(q)) \to \Gamma(X, \mathscr{F}(p+q))$. — Definition von $\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$: $m \in M^n$, $m \in M(n)^0$: $m \to \overset{m}{1} \in \Gamma(X, \mathscr{A}(M(n))) = \Gamma(X, \mathscr{A}(M)(n))$. — Definition von $\beta: \mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}$: Für $f \in B^k$ definieren wir Homomorphismen $\mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F}))(D(f)) \to \mathscr{F}(D(f))$:

$$\mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F}))(D(f)) = (\Gamma(\mathscr{F})_f)^0 \ni \frac{s}{f^n}, \quad s \in \Gamma(X, \mathscr{F}(nk)),$$

$$\frac{1}{f^n} \in \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X(-nk)), \quad \frac{s}{f^n} \to s \otimes \frac{1}{f^n} \in \Gamma(D(f), \mathscr{F}) = \mathscr{F}(D(f)).$$

Das so definierte Element hängt nur von s/f^n ab. Man erhält einen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus.

Lemma 1. *Die zusammengesetzten Homomorphismen* $\mathscr{A}(M) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{A}(M))) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}(M)$ *und* $\Gamma(\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(\mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F}))) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(\mathscr{F})$ *sind jeweils die Identitäten.*

Lemma 2. *Der Schnittflächenfunktor* Γ *von der Kategorie* $\boldsymbol{K}$ *der q.k. Garben auf* X *in die Kategorie der* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*-Moduln ist mit direkten Summen vertauschbar.*

Beweis. Es sei $\mathscr{F} = \bigoplus_k \mathscr{F}_k$, $\mathscr{F}_k \in \boldsymbol{K}$. Wir betrachten die durch $\mathscr{F}'(U) = \bigoplus_k \mathscr{F}_k(U)$ für offenes $U \subset X$ und die kanonischen Morphismen $r_V^U: \bigoplus_k \mathscr{F}_k(U) \xrightarrow{\bigoplus_k r_{kV}^U} \bigoplus_k \mathscr{F}_k(V)$ für $U \supset V$ gegebene Prägarbe $\mathscr{F}'$ auf X. $\mathscr{F}'$ ist eine Garbe: (F 1) Ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ und $s = \sum_k s_k$, $s' = \sum_k s_k' \in \mathscr{F}'(U)$, so folgt aus $r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(s')$ $\sum_k r_{U_\alpha}^U(s_k) = \sum_k r_{U_\alpha}^U(s_k')$, also $r_{U_\alpha}^U(s_k) = r_{U_\alpha}^U(s_k')$ für alle α und k. Die $\mathscr{F}_k$ waren nun q.k. Garben. Also ist $s_k = s_k'$ für alle k und damit $s = s'$. (F 2) Ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ und $(s_\alpha) \in \prod_\alpha \mathscr{F}'(U_\alpha)$ mit $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_\beta)$ für alle α, β, so ist mit $s_\alpha = \sum_k s_{\alpha,k}$ $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_{\alpha,k}) = r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_{\beta,k})$ für alle α, β und alle k. Also existieren für alle k $s_k \in \mathscr{F}_k(U)$ mit $r_{U_\alpha}^U(s_k) = s_{\alpha,k}$ für alle α. Da X ein Präschema im Sinne von 1.2.3. ist, können wir o.E.d.A. die Indexmenge der α als endlich annehmen. Dann sind aber nur endlich viele $s_k \neq 0$, und $s = \sum_k s_k \in \mathscr{F}'(U)$ hat die Eigenschaft

$r^U_{U_\alpha}(s)=s_\alpha$ für alle α. Nach 1.1.2. ist $\mathscr{F}'$ somit eine Garbe. Auf der Basis $\mathfrak{B}$ der offenen affinen Mengen von X stimmen aber $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}'$ überein (vgl. 1.2.3. (A)), und beides sind Garben. Folglich ist $\mathscr{F}=\mathscr{F}'$.

FOLGERUNG. *Auch die Funktoren φ_* und die abgeleiteten Funktoren $R^q\Gamma=H^q$ und $R^q\varphi_*$ sind mit direkten Summen in $\boldsymbol{K}$ vertauschbar.* (Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, daß eine direkte Summe injektiver Objekte in $\boldsymbol{K}$ wieder injektiv ist ([6], 4.)).

LEMMA 3. *$\alpha: M\to\Gamma(\mathscr{A}(M))$ ist $\boldsymbol{C}'$-bijektiv, d.h. mit $0\to K\to M\xrightarrow{\alpha}\Gamma(\mathscr{A}(M))\to K'\to 0$ sind K, $K'\in\boldsymbol{C}'$: $\mathscr{A}(K)=\mathscr{A}(K')=0$.*

BEWEIS. Nach Lemma 2 ist $\Gamma(\mathscr{A}(M))=\bigoplus_n\Gamma(X,\mathscr{A}(M)(n))\simeq\Gamma(X,\bigoplus_n\mathscr{A}(M)(n))=\Gamma(X,\psi_*(\mathscr{B}(M)))\simeq\Gamma(T,\mathscr{B}(M))$ und $\alpha: M\to\Gamma(\mathscr{A}(M))$ ist die Restriktion $r^S_T: M=\Gamma(S,\tilde{M})\to\Gamma(T,\tilde{M})\simeq\Gamma(T,\tilde{M}|T)=\Gamma(T,\mathscr{B}(M))$. Daraus folgt aber sofort $\mathscr{B}(K)=0$, also auch $\mathscr{A}(K)=0$. Zum Beweis, daß auch $\mathscr{B}(K')=0$ ist, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0\longrightarrow M & \xrightarrow{\quad d\quad} & \prod_i M & \xrightarrow{s} & \prod_{i\neq j} M \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha' & & \downarrow \\ 0\longrightarrow \Gamma(T,\mathscr{B}(M)) & \xrightarrow{d'} & \prod_i M_{t_i} & \xrightarrow{s'} & \prod_{i\neq j} M_{t_it_j} \end{array}$$

mit den Abbildungen $d': t\to(r^T_{T_i}(t))$ und $s': (m_i)\to\left(\frac{m_i}{1}-\frac{m_j}{1}\right)$. Wegen $M_{t_i}=\Gamma(T_i,\mathscr{B}(M))$, $M_{t_it_j}=\Gamma(T_i\cap T_j,\ \mathscr{B}(M))$ und der Garbeneigenschaft (F) von $\mathscr{B}(M)$ ist auch die untere Zeile exakt. Es genügt nun zu zeigen: Für alle $m\in K'=\Gamma(T,\mathscr{B}(M))/\alpha(M)$ gilt $\mathrm{Ann}(m)\supset(t_0,\ldots,t_r)^\sigma$, oder für alle $m\in\Gamma(T,\mathscr{B}(M))$ und jedes i_0 existiert ein δ_{i_0} mit $t_{i_0}^{\delta_{i_0}}m\in\alpha(M)$. Nach obigem Diagramm ist dies gleichbedeutend mit folgender Aussage: Zu $(m_i)\in\prod_i M_{t_i}$ mit $\left(\frac{m_i}{1}-\frac{m_j}{1}\right)=(0)$ in $\prod_{i\neq j}M_{t_it_j}$ gibt es ein δ_{i_0}, so daß $t_{i_0}^{\delta_{i_0}}(m_i)=(t_{i_0}^{\delta_{i_0}}m_i)\in\alpha'(d(M))$. Mit $m_i=\frac{m_i'}{t_i^{\varepsilon_i}}$, $m_i'\in M$, gilt für $\sigma=\varepsilon_{i_0}$ $t_{i_0}^\sigma m_{i_0}=m_{i_0}'=m\in M$ in $M_{t_{i_0}}$. Nun ist $t_{i_0}^\sigma(m_i)=(t_{i_0}^\sigma m_i)$ und $\left(\frac{t_{i_0}^\sigma m_i}{1}-\frac{t_{i_0}^\sigma m_j}{1}\right)=(0)$ in $\prod_{i\neq j}M_{t_it_j}$, insbesondere also $\frac{t_{i_0}^\sigma m_{i_0}}{1}-\frac{t_{i_0}^\sigma m_j}{1}=0$ in $M_{t_{i_0}t_j}$, und $\frac{t_{i_0}^\sigma m_{i_0}}{1}-\frac{m}{1}=0$ in $M_{t_{i_0}t_j}$, also $\frac{t_{i_0}^\sigma m_j}{1}-\frac{m}{1}=0$ in $M_{t_{i_0}t_j}$. Dann existieren aber τ,π gemeinsam für alle j mit $t_{i_0}^\tau t_j^\pi(t_{i_0}^\sigma m_j'-mt_j^{\varepsilon_j})=0$ in M, also $t_{i_0}^{\sigma+\tau}m_j-\frac{t_{i_0}^\tau m}{1}=0$ in M_{t_j} für alle j, und $\left(\frac{t_{i_0}^\tau m}{1}\right)\in\alpha'(d(M))$. Mit $\delta_{i_0}=\sigma+\tau$ ist somit $t_{i_0}^{\delta_{i_0}}(m_j)\in\alpha'(d(M))$.

LEMMA 4. *Zu jedem $\mathscr{F}\in\boldsymbol{K}$ gibt es ein $M\in\boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M)=\mathscr{F}$.*

BEWEIS. Nach Satz 1,2, Folgerungen in 1.3.1. existiert eine exakte Folge $\bigoplus_\mu\mathscr{O}_X(n_\mu)\xrightarrow{\gamma}\bigoplus_\nu\mathscr{O}_X(n_\nu)\to\mathscr{F}\to 0$. Anwendung des Funktors Γ auf den Morphismus γ liefert $\Gamma\left(\bigoplus_\mu\mathscr{O}_X(n_\mu)\right)\xrightarrow{\Gamma(\gamma)}\Gamma\left(\bigoplus_\nu\mathscr{O}_X(n_\nu)\right)\to M\to 0$ mit $M\in\boldsymbol{C}$ als Kokern.

Wendet man darauf den exakten Funktor $\mathscr{A}$ an und beachtet die Vertauschbarkeit mit direkten Summen, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{\mu} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n_\mu))\big) & \xrightarrow{\mathscr{A}\Gamma(\gamma)} & \bigoplus_{\nu} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n_\nu))\big) & \longrightarrow & \mathscr{A}(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow\beta & & \downarrow\beta & & \downarrow\beta' & & \\ \bigoplus_{\mu} \mathcal{O}_X(n_\mu) & \xrightarrow{\gamma} & \bigoplus_{\nu} \mathcal{O}_X(n_\nu) & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die wie oben definierten Morphismen $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n)) \to \mathcal{O}_X(n)$ sind aber Isomorphismen: Es ist $\mathcal{O}_X(n) = \mathscr{A}\big(B(n)\big)$, und mit Lemma 3 ist $\alpha: B(n) \to \Gamma\big(\mathscr{A}(B(n))\big)$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv. Daraus folgt durch Anwendung des exakten Funktors $\mathscr{A}: \mathscr{A}\big(B(n)\big) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(B(n)))\big)$ ist ein Isomorphismus. Nun ist nach Lemma 1 der zusammengesetzte Morphismus $\mathscr{A}\big(B(n)\big) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(B(n)))\big) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}\big(B(n)\big)$ $\beta \circ \mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{Id}$. Somit ist β ein Isomorphismus. — Dann ist aber auch der gestrichelte Morphismus β' ein Isomorphismus.

Lemma 5. *$\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Zu $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ gibt es ein $M \in \boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M) = \mathscr{F}$. Nach Lemma 3 ist $\alpha: M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv, also $\mathscr{A}(\alpha): \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(M))\big)$ ein Isomorphismus. Wie eben bei Lemma 4 schließt man dann: $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(M))\big) \to \mathscr{A}(M)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis von Satz 3. Wir definieren zunächst mit Hilfe der Funktoren $\mathscr{A}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{K}$ und $\Gamma: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{C}$ gleichbezeichnete Funktoren $\mathscr{A}: \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{K}$ und $\Gamma: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$. Nach Definition der Quotientenkategorie $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ ([9], chap. I, 1.11.) ist dazu nur noch für einen Morphismus $\varphi: M \to N$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ $\mathscr{A}(\varphi)$ zu definieren. Nun wird nach Definition φ gegeben durch einen Morphismus φ' *in* $\boldsymbol{C}$ eines Unterobjektes M' von M in ein Quotientenobjekt N/N' von N, wo M/M' und $N' \in \boldsymbol{C}'$. Man hat also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi: M & \longrightarrow & N \quad \text{in } \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'. \\ \uparrow i & & \downarrow p \\ \varphi': M' & \longrightarrow & N/N' \text{ in } \boldsymbol{C} \end{array}$$

Anwendung von $\mathscr{A}$ liefert somit Isomorphismen $\mathscr{A}(M') \xrightarrow{\mathscr{A}(i)} \mathscr{A}(M)$, $\mathscr{A}(N) \xrightarrow{\mathscr{A}(p)} \mathscr{A}(N/N')$. Der Morphismus $\mathscr{A}(\varphi): \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}(N)$ in $\boldsymbol{K}$ wird nun folgendermaßen definiert: $\mathscr{A}(\varphi) = \mathscr{A}(p)^{-1} \circ \mathscr{A}(\varphi') \circ \mathscr{A}(i)^{-1}$. So erhält man tatsächlich einen Funktor $\mathscr{A}: \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{K}$. Zum Nachweis der Äquivalenz von $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ und $\boldsymbol{K}$ genügt es nach [5], (1.23), (1.30), zu zeigen, daß die Funktoren $\Gamma \circ \mathscr{A}$ und $\mathrm{Id}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}')$ sowie $\mathscr{A} \circ \Gamma$ und $\mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$ (Id bezeichnet jeweils den identischen Funktor) isomorph sind. Dazu haben wir Morphismen von Funktoren (1.1.1.) $\alpha: \mathrm{Id}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}') \to \Gamma \circ \mathscr{A}$ und $\beta: \mathscr{A} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$ anzugeben, so daß (α) für alle $M \in \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ $\alpha(M): M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$ ein Isomorphismus in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$, und ($\beta$) für alle $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ $\beta(\mathscr{F}): \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$ ein Isomorphismus in $\boldsymbol{K}$ ist. Wir nehmen dazu für α, β gerade die oben definierten α, β. So erhält man tatsächlich Morphismen

von Funktoren. (α) und (β) sind erfüllt: Nach Lemma 3 ist $\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv. Man hat also das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\mathscr{A}(M)) & \longrightarrow & K' \longrightarrow 0 \\ & & & & p\downarrow & & \uparrow i & & \\ & & & & M/K & \xleftarrow{\alpha^{-1}} & \alpha(M) & & \end{array}$$

$K, K' \in \boldsymbol{C}'$. Durch α^{-1} wird also ein Morphismus $\alpha': \Gamma(\mathscr{A}(M)) \to M$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ definiert, und es ist $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{id}(M)$ und $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}(\Gamma(\mathscr{A}(M)))$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$. Somit gilt ($\alpha$). ($\beta$) ergibt sich aus Lemma 5.

1.3.3. *Berechnung der $H^q(X, \mathscr{F})$ für ein projektives Schema X* ([*18*], §3, [*11*]). Nach 1.2.5. kann man die $H^q(X, \mathscr{F})$ mittels des Čechschen Komplexes $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = (X_i)_i$ von X durch die zu den t_i in $B = A[t_0, \ldots, t_r]$ gehörigen, wie in 1.3.1. erhaltenen, offenen affinen Mengen $X_i = D(t_i)$ berechnen. Folglich sind $H^q(X, \mathscr{F})$ und $R^q\varphi_*(\mathscr{F}) = 0$ für $q > r$.

Zu $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ gibt es nach 1.3.2. ein $M \in \boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M) = \mathscr{F}$. Wörtlich wie in [*18*], 61. definiert man nun für den graduierten $B = A[t_0, \ldots, t_r]$-Modul M die Komplexe $C_k^*(M)$ und $C^*(M) = \varinjlim_{k \to \infty} C_k^*(M)$ von A-Moduln. C_k^* und C^* sind exakte Funktoren von der Kategorie der graduierten B-Moduln in die Kategorie der Komplexe von A-Moduln. Ebenso wie in [*18*], 64. definiert man Morphismen $i_k: C_k^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$ und durch Übergang zum direkten Limes einen Morphismus $i: C^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$.

SATZ 4. *$i: C^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$, $M \in \boldsymbol{K}$, ist ein Isomorphismus der Komplexe von A-Moduln.*

BEWEIS. Man hat eine exakte Folge $\bigoplus_{\mu} B(n_\mu) \to \bigoplus_{\nu} B(n_\nu) \to M \to 0$. $M \Rightarrow \mathscr{A}(M)$ und $\mathscr{F} \Rightarrow \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$ sind exakte Funktoren (letzterer, da alle $X_i \in \mathfrak{U}$ und alle $X_{i_0 \ldots i_q} = X_{i_0} \cap \ldots \cap X_{i_q}$ offene affine Mengen auf X sind), die mit direkten Summen vertauschbar sind (Lemma 2, Folgerung). Nun kann man wie in [*18*], 64., prop. 4 weiterschließen.

FOLGERUNG. *$H^q(i): H^q(C^*(M)) \to H^q(X, \mathscr{A}(M)) = H^q(X, \mathscr{F})$ sind Isomorphismen der A-Moduln.*

Dem projektiven Morphismus $\varphi: X \to Y$ entspricht der Ringhomomorphismus $B = A[t_0, \ldots, t_r] \leftarrow A$. Nun hat man einen Epimorphismus $B_0 = A[T_0, \ldots, T_r] \to B = A[t_0, \ldots, t_r]$, $a \to a$, $T_i \to t_i$, B_0 *freier Polynomring über A*, und ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} B_0 & \to & B \\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & A & \end{array}$. Bezeichnet man das zu B_0 gehörige projektive Schema mit X_0 und den zu $B_0 \leftarrow A$ gehörigen projektiven Morphismus mit $\varphi_0: X_0 \to Y$, so entspricht dem ein Diagramm $\begin{array}{ccc} X_0 & \xleftarrow{i} & X \\ & {\scriptstyle\varphi_0}\searrow\ \swarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ & Y & \end{array}$, also eine Faktorisierung von φ in einen Morphismus i, einen Isomorphismus von X mit einem abgeschlossenen Unterschema $i(X) \subset X_0$, und in einen *freien*

projektiven Morphismus φ_0: $\varphi = \varphi_0 \circ i$. Ist $\bigcup_i U_i = X_0$ eine Überdeckung von X_0 durch offene affine Mengen U_i, so ist $\bigcup_i i^{-1}(U_i) = X$ eine Überdeckung von X durch offene affine Mengen $i^{-1}(U_i)$. Der Morphismus i hat also die Eigenschaft *ii*) aus 1.2.4.: i_* ist ein exakter Funktor und für eine q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X ist $H^q(X, \mathscr{F}) \simeq H^q\big(X_0, i_*(\mathscr{F})\big)$ (1.2.5. Folgerungen). Zur Berechnung der $H^q(X, \mathscr{F})$ genügt es also, sich auf über A freie projektive Schemata X zu beschränken. — Mit $\mathscr{F}$ ist auch $i_*(\mathscr{F})$ kohärent: Es ist $\Gamma\big(U_i, i_*(\mathscr{F})\big) \simeq \Gamma\big(i^{-1}(U_i), \mathscr{F}\big)$. Der letztere Modul ist aber ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X\big(i^{-1}(U_i)\big)$-Modul, wenn $\mathscr{F}$ kohärent auf X ist. Zufolge des Epimorphismus $\mathcal{O}_{X_0}(U_i) \to \mathcal{O}_X\big(i^{-1}(U_i)\big)$ ist dann $\Gamma\big(U_i, i_*(\mathscr{F})\big)$ auch ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{X_0}(U_i)$-Modul.

Ist X *frei projektiv über* A, also $B = A[T_0, \ldots, T_r]$ freier Polynomring über A, so kann man wie in [*18*], 62. die $H^q\big(C^*(B(n))\big)$ und damit nach Satz 4, Folgerung die $H^q\big(X, \mathcal{O}_X(n)\big)$ ausrechnen und erhält

Lemma 6. *$H^q\big(X, \mathcal{O}_X(n)\big)$ ist ein endlich erzeugter A-Modul und $=0$ für $n \geqq N$ und $q > 0$.*

Satz 5 ([*12*], [*11*]). *$\varphi: X \to Y$ sei ein projektiver Morphismus, Y affin, $\mathscr{F}$ kohärent auf X. Dann gilt*

(i) $R^q\varphi_*\big(\mathscr{F}(n)\big) = 0$ für $n \geqq N$ und $q > 0$.

(ii) $R^q\varphi_*(\mathscr{F})$ ist kohärent auf Y.

Beweis. Es genügt, die entsprechenden Behauptungen *(i)* $H^q\big(X, \mathscr{F}(n)\big) = 0$ für $n \geqq N$ und $q > 0$ und *(ii)* $H^q(X, \mathscr{F})$ ist ein endlich erzeugter A-Modul für ein über A *frei* projektives Schema X zu beweisen. Nun hat man nach 1.3.1. eine exakte Folge $0 \to \mathscr{K} \to \mathcal{O}_X(m)^k \to \mathscr{F} \to 0$ mit kohärentem Kern $\mathscr{K}$ und somit exakte Folgen $0 \to \mathscr{K}(n) \to \mathcal{O}_X(m+n)^k \to \mathscr{F}(n) \to 0$ für jedes n. Durch absteigende Induktion nach q ergeben sich dann die Behauptungen mittels der exakten Cohomologiefolgen $H^q\big(X, \mathcal{O}_X(m+n)^k\big) \to H^q\big(X, \mathscr{F}(n)\big) \to H^{q+1}\big(X, \mathscr{K}(n)\big)$ und $H^q\big(X, \mathcal{O}_X(m)\big) \to H^q(X, \mathscr{F}) \to H^{q+1}(X, \mathscr{K})$ aus Lemma 6. Der Induktionsanfang ergibt sich aus dem Verschwinden der $H^q(X, \mathscr{G})$ für alle q.k. Garben $\mathscr{G}$ auf X, falls $q > r$ ist, $B = A[T_0, \ldots, T_r]$, $T_i \in B^1$.

Literatur

[*1*] Auslander, M., and D. Buchsbaum: Unique factorization in regular local rings. Proc. Nat. Acad. of Sci. **45**, 733—734 (1959).

[*2*] Borel, A., et J.-P. Serre: Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. math. Fr. **86**, 97—136 (1958).

[*3*] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton Math. Series Nr. 19. Princeton 1959.

[*4*] Cartier, P.: Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique. Bull. Soc. math. Fr. **86**, 177—251 (1958).

[*5*] Dold, A.: Homology of symmetric products and other functors of complexes. Ann. of Math. **68**, 54—80 (1958).

[*6*] Gabriel, P.: Objects injectifs dans les catégories abéliennes. Sem. Dubreil-Pisot: Algèbre et théorie des nombres, **12**, Nr. 17 (1958/59).

[*7*] — Faisceaux quasi-cohérents, le théorème de Serre, les foncteurs dérivés des foncteurs classiques. Sem. Chevalley **3**, Nr. 1—3 (1958/59).

[8] GODEMENT, R.: Théorie de faisceaux. Actual. Scient. et Jnd., Nr. 1252. Paris 1958.
[9] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119—221 (1957).
[10] — Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébrique cohérents. Sem. Bourbaki, 2 éd., **9**, Nr. 149 (1956—57).
[11] — Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. Sem. Cartan, Nr. 12 (1956/57).
[12] — Cohomology theory of abstract algebraic varieties. Proc. Intern. Congress of Math., 103—118. Edinburgh 1958.
[13] — Éléments de géométrie algébrique I. Publ. Math., Nr. 4 (1960).
[14] KUNZ, E.: Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. **75**, 55—74 (1961).
[15] LANG, S.: Introduction to algebraic geometry. New York 1958.
[16] NASTOLD, H.-J.: Zum Dualitätssatz in inseparablen Funktionenkörpern der Dimension 1. Math. Z. **75**, 75—84 (1961).
[17] SEIDENBERG, A.: The hyperplane sections of normal varieties. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 357—386 (1950).
[18] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61**, 197—278 (1955).
[19] — Cohomologie et géométrie algébrique. Proc. Intern. Congress of Math. vol. **3**, 515—520. Amsterdam 1954.
[20] — Groupes algébriques et corps de classes. Actual. Scient. et Ind., Nr. 1264. Paris 1959.
[21] — Algébre locale, multiplicités. Cours professé au College de France 1957/58, rédigé par P. GABRIEL (vervielfältigt).
[22] ZARISKI, O.: Complete Linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi. Ann. of Math. **55**, 552—592 (1952).
[23] — Scientific report on the second summer institute. Part. III. Algebraic sheaf theory. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 117—141 (1956).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. April 1961)

Ingenieur-Mathematik

Von Dr. R. SAUER, Professor an der Technischen Hochschule München

Erster Band

Differential- und Integralrechnung

Zweite, durchgesehene Auflage

Mit 178 Abbildungen. VIII, 304 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 24,—

INHALTSVERZEICHNIS

Differential- und Integralrechnung für Funktionen von einer Veränderlichen: Reelle Zahlen. Funktionen von einer Veränderlichen; Stetigkeit. Spezielle Funktionen; Kurvendiskussion. Lineare analytische Geometrie der Ebene. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Grenzwert. Grundzüge der Differentialrechnung. Mittelwertsätze der Differentialrechnung. Numerische und graphische Differentiation; Interpolation. Grundzüge der Integralrechnung. Graphische und numerische Integration. Logarithmus und Exponentialfunktion; Hyperbelfunktionen. Rechenschieber und logarithmische Papiere. Unendliche Reihen. TAYLOR-Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen. Anwendungen der TAYLOR-Entwicklung für das numerische Rechnen. Komplexe Zahlen. Elementar integrierbare Funktionenklassen. Differentialgeometrie der ebenen Kurven. Anwendung der Differentialgeometrie auf die Getriebelehre.

Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen: Funktionen von mehreren Veränderlichen. Graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher (Nomographie). Vektorrechnung. Determinanten und Systeme linearer Gleichungen. Lineare analytische Geometrie des Raumes. Analytische Geometrie der Flächen 2. Ordnung. Grundzüge der Differentialrechnung bei Funktionen von mehreren Veränderlichen. TAYLOR-Entwicklung für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Anwendung der TAYLOR-Entwicklung bei mehreren Veränderlichen für das numerische Rechnen. Allgemeine Abbildungen und allgemeine Koordinatensysteme. Integraldarstellung von Funktionen. Mehrfache Integrale. Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im Raum. Anwendungen der Integralrechnung in der Mechanik · Anhang: Beweise · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Vorlesungen über Funktionentheorie

Von Dr. Alexander Dinghas,
o. Professor der Mathematik an der Freien Universität Berlin

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 110)

Mit 25 Abbildungen. XVI, 403 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 64,50; Ganzleinen DM 69,—

INHALTSÜBERSICHT

Die Grundlagen der Funktionentheorie: Die komplexe Ebene. Topologie der komplexen Ebene. Die Cauchysche Konvergenztheorie. Stetige Abbildungen. Lokale Eigenschaften der eindeutigen analytischen Funktionen. Die Hauptsätze der Cauchyschen Funktionentheorie · Die Grundlagen der Riemann-Weierstraßschen Funktionentheorie: Erzeugung analytischer Funktionen durch Grenzprozesse. Der Riemann-Weierstraßsche Begriff der analytischen Funktion. Die Eulersche Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion · Maximumprinzip und Werteverteilung: Majorisierungs- und Wachstumsprobleme. Geometrische Funktionentheorie. Konforme Abbildung. Eindeutige analytische Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität · Literatur-, Namen -und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Das Buch wendet sich an die Studierenden der Naturwissenschaften, an erster Stelle an diejenigen der Mathematik und Physik. Aber auch der Mathematiker mit abgeschlossener Ausbildung, sowie der Forscher findet darin einen konsequenten Aufbau der Funktionentheorie von ihren Anfängen bis zu den grundlegenden Arbeiten von Nevanlinna und Ahlfors.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany